Les groupes $PSL(4,\mathbb{F}_2)$ et $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ ne sont pas isomorphes

Les groupes $PSL(4,\mathbb{F}_2)$ et $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ sont simples (comme tous les $PSL(n,\mathbb{K})$ à quelques exceptions près) et ont le même cardinal (un calcul direct vous en convaincra). On se propose de démontrer qu'ils ne sont pas isomorphes. Pour cela, on va compter le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2.

Notons $G = PSL(4,\mathbb{F}_2)$ et $H = PSL(3,\mathbb{F}_4)$.

Proposition 1. Dans G, il y a (au moins) deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2. Dans H, il n'y en a qu'une.

Démonstration.

- Tout d'abord, $G = PSL(4,\mathbb{F}_2) = SL(4,\mathbb{F}_2) = GL(4,\mathbb{F}_2)$. Un élément d'ordre 2 dans G est une matrice M de polynôme minimal $X^2 - 1 = (X-1)^2$ (car en caractéristique 2), donc $M = I_4 + N$ avec N nilpotente d'ordre 2. En prenant N de rang 2 ou N de rang 1, on obtient au moins deux classes de conjugaison distinctes (on peut montrer que ce sont les seuls).

- Ensuite, dans H : on va commencer par regarder ce qu'il se passe dans $GL(3,\mathbb{F}_4)$. Comme précédemment, une matrice d'ordre 2 dans $GL(3,\mathbb{F}_4)$ est de la forme $I_3 + N$ avec N nilpotente d'ordre 2. Ceci implique que N est de rang 1, et de noyau de dimension 2. On choisit un vecteur x tel que $Nx \neq 0$. Alors $Nx \in \ker(N)$, qu'on complète par y en une base de $\ker(N)$. Dans la base (Nx, x, y), N a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, toutes les matrices nilpotentes d'ordre 2 sont conjuguées dans $GL(3,\mathbb{F}_4)$, donc toutes les matrices d'ordre 2 sont conjuguées dans $GL(3,\mathbb{F}_4)$.

  Dans $SL(3,\mathbb{F}_4)$: on note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in SL(3,\mathbb{F}_4)$ d'ordre 2. Par le résultat précédent, il existe $P \in GL(3,\mathbb{F}_4)$ tel que $PJP^{-1} = M$. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\det P)^{-1} \end{pmatrix}$, puis $Q = PD$. Comme D et J commutent, on a $QJQ^{-1} = M$ et de plus $Q \in SL(3,\mathbb{F}_4)$. Donc M et J sont conjuguées dans $SL(3,\mathbb{F}_4)$. Il n'y a donc aussi qu'une seule classe d'élément d'ordre 2 dans $SL(3,\mathbb{F}_4)$.

  Dans H : on note $\overline{A}$ la projection de $A \in SL(3,\mathbb{F}_4)$ dans H. Soit $M \in SL(3,\mathbb{F}_4)$ tel que $\overline{M}$ soit d'ordre 2, c'est-à-dire $\overline{M}^2 = \overline{I_3}$ et $\overline{M} \neq \overline{I_3}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{F}_4^*$ tel que $M^2 = \lambda I_3$. Dans $\mathbb{F}_4$, tous les éléments sont des carrés, donc il existe μ tel que $\lambda = \mu^2$. En posant $M' = \mu^{-1} M$, on obtient $M'^2 = I_3$ et $M' \neq I_3$ (car sinon $M = \mu I_3$ donc $\overline{M} = \overline{I_3}$). Donc M' est d'ordre 2 et est dans $SL(3,\mathbb{F}_4)$, donc est conjugué à J, donc $\overline{M} = \overline{M'}$ est conjugué à $\overline{J}$.

□

Source : H2G2. J'ai modifié un peu certains arguments pour rendre la démonstration plus élémentaire. Notamment, il n'est pas nécessaire de faire appel à toute la décomposition de Jordan, je redémontre à la main les morceaux dont on a besoin.