Point fixe de Brouwer

Théorème
Toute fonction $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ continue admet un point fixe.

DÉMONSTRATION
On suppose que f n'a aucun point fixe.

On peut supposer sans perte de généralités que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Sinon on approxime f avec une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sans aucun point fixe dont l'existence est garantie par le théorème de Stone-Weierstrass.

Pour tout $x \in \mathbb{B}^n$, on définit $\varphi(x)$ comme l'intersection entre $\mathbb{S}^{n-1}$ et la demi-droite $[f(x); x\ )$, bien définie puisque f n'a aucun point fixe.
En fait, $\varphi(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$ où $\lambda(x) \geqslant 0$ vérifie $\left\|\varphi(x)\right\|_2^2 = 1$.

$\lambda(x)$ est la racine positive du polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left\|x - f(x)\right\|_2^2 + 2\lambda\langle f(x), x - f(x)\rangle + \left\|f(x)\right\|_2^2 - 1.$$

Comme ce polynôme a 2 racines simples réelles, $\lambda(x)$ dépend de manière $\mathcal{C}^1$ des coefficients du polynôme, donc dépend de manière $\mathcal{C}^1$ de x. Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme $\mathbb{B}^n$ est compact, par continuité, il existe $\beta \in]0; 1[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{B}^n,\ \left|\left|\left|d\varphi(x)\right|\right|\right| \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

Par inégalité des accroissements finis, on en déduit que φ est $\dfrac{1}{\beta}$-lipschitzienne.

Pour tout $t \geqslant 0$, on pose $\varphi_t(x) = (1 - t)x + t\varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On pose $\alpha = \dfrac{\beta}{1+\beta}$.
Soit $t \in [0;\alpha[\subset [0;\beta[$. Soient $x, y \in \mathbb{B}^n$ tels que $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$.
Alors $\|x-y\| = \dfrac{t}{1-t}\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leqslant \dfrac{t}{\beta(1-t)}\|x-y\| \leqslant \dfrac{t}{\beta}\|x-y\|$.
Comme $\dfrac{t}{\beta(1-t)} < \dfrac{\frac{\beta}{1+\beta}}{\beta\left(1-\frac{\beta}{1+\beta}\right)} = 1$, on a $x = y$.
On a bien l'injectivité de φ_t si $t \in [0;\alpha[$.

Soit $t \in [0;\alpha[\subset [0;1[$. Soit $x \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$.
Alors $d\varphi_t(x) = (1-t)\mathrm{Id} + t d\varphi(x) = (1-t)\left(\mathrm{Id} + \dfrac{t}{1-t}d\varphi(x)\right)$.
Comme $\left\|\!\left|\mathrm{Id} - \left(\mathrm{Id} + \dfrac{t}{1-t}d\varphi(x)\right)\right|\!\right\| = \dfrac{t}{1-t}\left\|\!\left|d\varphi(x)\right|\!\right\| \leqslant \dfrac{t}{(1-t)\beta} < 1$,
l'endomorphisme $\mathrm{Id} + \dfrac{t}{1-t}d\varphi(x)$ est inversible.
Donc $d\varphi_t(x) = (1-t)\left(\mathrm{Id} + \dfrac{t}{1-t}d\varphi(x)\right)$ est inversible.

Soit $t \in [0;\alpha[\subset [0;1[$.
Par le théorème d'inversion globale, φ_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$ et $\varphi_t\left(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n\right)$, ouvert de $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$.

Soit $y_n = \varphi_t(x_n)$ suite de $\varphi_t\left(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n\right)$, convergeant vers $y \in \overset{\circ}{B}_n$.
Par compacité de $\mathbb{B}^n$, quitte à extraire une sous-suite de $(x_n)_n$, on peut supposer que la suite est convergente vers $x \in \mathbb{B}^n$.

Par continuité, $y = \varphi_t(x)$.

Si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ alors $y = (1-t)x + t\varphi(x) = x \in \mathbb{S}^n$. Absurde car $y \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$.
Donc $x \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$ et $y \in \varphi_t\left(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n\right)$ qui est un fermé de $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$.

Comme $\varphi_t\left(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n\right)$ est un ouvert fermé du connexe $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$, $\varphi_t\left(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n\right) = \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$.

Pour $t \geqslant 0$, on pose $P(t) = \displaystyle\int_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}^n} \det(d\varphi_t(x))\, dx$ polynomiale en t car $\det$ est polynomiale en les coefficients et le caractère polynomial est conservé par intégration.

Comme pour tout $x \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}^n$ et $t \in [0; \alpha[$, $d\varphi_t(x)$ est inversible, $\det(d\varphi_t(x))$ est de signe constant.
Or $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}^n,\ \det(d\varphi_0(x)) = \det(\mathrm{Id}) = 1 > 0$. D'où pour tout $t \in [0; \beta[$,

$$\begin{aligned}
P(t) &= \int_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}^n} \det(d\varphi_t(x))\, dx \\
&= \int_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}^n} |\det(d\varphi_t(x))|\ dx \text{ par positivité du déterminant sur le domaine} \\
&= \int_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}^n} dy \text{ par le changement de variable } y = \varphi_t(x) \\
&= \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n).
\end{aligned}$$

Comme le polynôme P est constant sur un intervalle non trivial, P est constant.
En particulier,

$$P(1) = \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n) = \int_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}^n} \det(d\varphi_1(x))\, dx = \int_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}^n} \det(d\varphi(x))\, dx.$$

Comme $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}^n,\ \left\|\varphi(x)\right\|_2 = 1$, par différentiation,

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}^n,\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ \langle d\varphi(x)(h), \varphi(x)\rangle = 0.$$

D'où pour tout $x \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}^n,\ d\varphi(x)$ est à valeurs dans l'hyperplan $\varphi(x)^\perp$. Donc

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n) = P(1) = \int_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}^n} \det(d\varphi(x))\, dx = \int_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}^n} 0\, dx = 0.$$

Absurde. $\square$