Développement asymptotique de la série harmonique

Lemme — $\forall \alpha > 1,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

DÉMONSTRATION
Soit $\alpha > 1$.
Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable et décroissante, d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge et vérifie :

$$\forall n \geqslant 1,\ \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

soit

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Proposition — $H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $k_n = \min\left\{k \in \mathbb{N} \ / \ H_k \geqslant n\right\}$.
Alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$.

DÉMONSTRATION
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n) - \dfrac{1}{n}$.

Soit $n \geqslant 1$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$$

et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$$

et

$$u_n - v_n = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et donc une limite finie γ.

On conclut que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $t_n = u_n - \gamma$. Alors

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{2(n+1)^2}$ est à termes positifs et convergente, par équivalence des restes,

$$-t_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(t_{k+1} - t_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{-1}{2(k+1)^2} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{2k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$$

Donc

$$t_n = H_n - \ln(n) - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $w_n = t_n - \dfrac{1}{2n}$.

$$
\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \\
&= -\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) + \frac{1}{2n(n+1)} \\
&= \frac{1}{2n(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) \\
&= \frac{3(n+1)}{6n(n+1)^3} - \frac{2n}{6n(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) \\
&= \frac{n+3}{6n(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) \\
&= \frac{1}{6(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) \\
&\sim \frac{1}{6(n+1)^3}
\end{aligned}
$$

Comme la série $\sum \frac{1}{6(n+1)^3}$ est à termes positifs et convergente, par équivalence des restes,

$$
-w_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6(n+1)^3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.
$$

Donc

$$w_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par définition de k_n,

$$\ln(k_n) + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geqslant n > \ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n-1}.$$

D'où

$$k_n e^{\gamma+\varepsilon_{k_n}} \geqslant e^n \text{ et } (k_n - 1)e^{\gamma+\varepsilon_{k_n-1}} < e^n.$$

Donc

$$e^n e^{-\gamma-\varepsilon_{k_n-1}} + 1 > k_n \geqslant e^n e^{-\gamma-\varepsilon_{k_n}}.$$

Ainsi

$$k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n e^{-\gamma}$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e.$$