VM

25/01/15

Base hilbertienne de polynômes orthogonaux

202, 207, 209, 213, 234, 239, 240, 245

Bech - Malik - Peyré

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable, appelée poids.

On se place dans l'espace L^2 associée à la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue sur I :

$$L^2(I,\rho) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \mid \int_I f^2 \rho < +\infty \right\}$$

(à égalité modulo p.p près)

→ Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x)\,dx < +\infty$.

Alors pour tout $n \geq 0$, $x \mapsto x^n$ appartient à $L^2(I,\rho)$. Le processus de Gram-Schmidt permet de construire une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthonormés pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I fg\rho$, tels que $\forall n$, $\deg P_n = n$.

Théorème : La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

dém : On sait déjà qu'elle est orthonormée, il suffit de montrer que $\overline{\mathrm{Vect}(P_n, n\in\mathbb{N})} = L^2(I,\rho)$,

i.e $\overline{\mathrm{Vect}(x^n, n\in\mathbb{N})} = L^2(I,\rho)$,

i.e $\mathrm{Vect}(x^n, n\in\mathbb{N})^\perp = \{0\}$.

Soit $f \in \mathrm{Vect}(x^n, n\in\mathbb{N})^\perp$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \mathbb{1}_I(x) f(x) \rho(x)$$

Montrons que φ est $L^1(\mathbb{R})$:

$$\forall x \in I,\quad |\varphi(x)| = \underbrace{|f(x)|\,|\rho(x)|^{1/2}}_{\substack{\in L^2(I) \\ \text{car } f \in L^2(I,\rho)}}\ \underbrace{|\rho(x)|^{1/2}}_{\in L^2(I)}$$

donc $f\rho \in L^1(I)$: $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Soit $\hat{\varphi}$ la transformée de Fourier de φ :

$$\hat{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x)\, dx = \int_I e^{-i\xi x} f(x) \rho(x)\, dx.$$

Lemme : $\hat{\varphi} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par théorème d'inversion de Fourier, comme $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, donc ($\rho > 0$) $f \equiv 0$ sur I, ce qui conclut la preuve du théorème.

---

dém du lemme : Soit $U_\alpha = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\alpha}{2} \}$. U_α est un ouvert de $\mathbb{C}$.

On pose $\psi : U_\alpha \to \mathbb{C}$
$$z \mapsto \int_I e^{-izx} f(x) \rho(x)\, dx.$$

Montrons que ψ est bien définie et holomorphe sur U_α.

Soit $z \in U_\alpha$. Soit $x \in I$,

$$|e^{-izx} f(x) \rho(x)| = e^{\mathrm{Re}(-izx)} |f(x)|\, \rho(x)$$
$$\leq \underbrace{e^{\frac{\alpha}{2}|x|} \rho(x)^{1/2}}_{\in L^2(I) \text{ par hypothèse sur } \alpha} \underbrace{|f(x)|\, \rho(x)^{1/2}}_{\in L^2(I)} =: \Theta(x)$$

donc $\Theta \in L^1(I)$ et ψ est bien définie.

De plus, $\forall z \in U_\alpha$, $x \mapsto e^{-izx} f(x) \rho(x)$ est mesurable sur I (m̂ intégrable)

$\forall x \in I$, $z \mapsto$ ——— est holomorphe sur U_α

$\forall z \in U_\alpha$, $\forall x \in I$, $|e^{-izx} f(x)\rho(x)| \leq \Theta(x)$ et Θ est positive et dans $L^1(I)$

donc par théorème d'holomorphie sous l'intégrale, ψ est holomorphe sur U_α et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi^{(n)}(z) = \int_I (-ix)^n e^{-izx} f(x) \rho(x)\, dx$$

donc $\psi^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x)\, dx = 0$ car $f \in \mathrm{Vect}(x^k)^\perp$

$\forall n \geq 0$, $\psi^{(n)}(0) = 0$ donc par principe de prolongement analytique, $\psi \equiv 0$ sur U_α et donc $\hat{\varphi} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.