$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) > 0\}$

$$\Gamma : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt$$

1) Γ bien défini et holomorphe sur $\mathcal{D}$

- Soit K compact de $\mathcal{D}$, $\exists \varepsilon > 0, M > 0 \,/\, \forall z \in K$, $Re(z) \in [\varepsilon, M]$

Donc $g(t) = \mathbb{1}_{t \in]0;1[} e^{-t} t^{\varepsilon - 1} + \mathbb{1}_{[1;+\infty[} e^{-t} t^{M-1}$ est une domination intégrable de $|e^{-t} t^{z-1}|$. Γ bien défini et holomorphe sur $\mathcal{D}$.

2) Γ admet un prolongement meromorphe sur $\mathbb{C}$ définit par $\tilde{\Gamma}$ $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt$$

- $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z) \quad \forall z \in \mathcal{D}$

Il suffit de montrer $\forall z \in \mathcal{D}$ $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$

or $\displaystyle e^{-t} t^{z-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n\right) t^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} \, dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}\right) dt = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \, dt}_{\text{Fubini Lebesgue}}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{(n+z)}$$

Justification Fubini-Lebesgue

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}\right| = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} |t^{z-1}| = \int_0^1 e^t |t^{z-1}|$$

$$= \int_0^1 e^t t^{Re z - 1} \, dt$$

$< +\infty$ car $Re(z) > 0$

• Γ méromorphe sur $\mathbb{C}$

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n : z \to \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ méromorphe de pôle simple $-n$

(2) K cpct de $\mathbb{C}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\overline{B(0,N)} \supset K$, donc $\forall n > N$ f_n pas de pôle dans K or $\forall z \in K$

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n!|z+n|} \leq \frac{1}{n!(n-|z|)} \leq \frac{1}{n!(n-N)}$$

Donc la série $\sum_{n > N} f_n$ est normalement convergente sur K

(*) $\forall z \in K$ Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} f_n(z)}_{\text{méromorphe car somme finie de méromorphe}} + \underbrace{\sum_{n > N} f_n(z)}_{\text{holomorphe par Weierstrass}}$

donc $\sum f_n$ est méromorphe sur tout compact donc méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses pôles simples sont $-\mathbb{N}$

or $\displaystyle\Gamma(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)}_{\text{méromorphe}} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$

holomorphe par th holo sur tout cpct

$|e^{-t} t^{z-1}| \leq e^{-t} t^{M-1} \in L^1([1,+\infty[)$

$\Rightarrow$ Γ est donc un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$

or $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ est connexe donc on a unicité du prolongement.