Th : K cpct de $\mathbb{C}$ de complémentaire connexe

$a \in K^c \Rightarrow \dfrac{1}{z-a}$ est limite uniforme de polynome sur K

Preuve : On appelle $P(K)$ l'adherence des polynomes dans $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. $P(K)$ sous algebre de $C(K)$ en effet on a $P_n \to f$, $Q_n \to g \Rightarrow P_n + Q_n \to f+g$ et $P_n Q_n \to fg$ où P_n, Q_n sont des polynomes.

Pour $a \in K^c$ on définit $\varphi_a : K \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{z-a}$ $\quad \varphi_a \in C(K)$

On reformule alors le théorème

$$a \in K^c \Rightarrow \varphi_a \in P(K)$$

On pose alors $A = \{a \in K^c \,/\, \varphi_a \in P(K)\}$

Preuve par connexité :

1) $A \neq \emptyset$

Soit $R = \sup_{z \in K} |z|$. On a $|a| > R \Rightarrow a \in A$

En effet $\varphi_a(z) = -\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{1-\frac{z}{a}}\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{a^{n+1}}$. Cette série étant normalement convergente car $\left|\dfrac{z^n}{a^{n+1}}\right| \leq \underbrace{\left(\dfrac{R}{|a|}\right)}_{<1}^n R^{-1}$ il suffit de poser $P_N(z) = -\sum_{n=0}^{N} \dfrac{z^n}{a^{n+1}}$. On a bien $\forall N \in \mathbb{N}$ P_N polynome et $P_N \to \varphi_a$ d'où $\varphi_a \in P(K)$

2) A fermé : Comme $\overline{P(K)} = P(K)$ il suffit de montrer $a \in \bar{A} \cap K^c \Rightarrow \varphi_a \in \overline{P(K)}$

Soit $\bar{a} \in \bar{A} \cap K^c$, $d = d(\bar{a}, K)$ soit a_n suite de A telle que $a_n \to \bar{a}$ et $|a_n - \bar{a}| \leq \frac{d}{2}$

$z \in K$ on a $$\left|\frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-\bar{a}}\right| = \left|\frac{a_n - \bar{a}}{(z-a_n)(z-\bar{a})}\right| \leq \frac{|a_n - \bar{a}|}{\frac{d}{2}\, d}$$

D'où $\|\varphi_{a_n} - \varphi_{\bar{a}}\|_\infty \leq \frac{2}{d^2}|a_n - \bar{a}|$ donc $\varphi_{\bar{a}} \in \overline{P(K)}$

Donc A fermé

3) A ouvert : $a \in K^c$, $d = d(a, K)$ on va montrer $\bar{D}(a, \frac{d}{2}) \subset A$. On si $|h| \leq \frac{d}{2}$ et $z \in K$

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{h}{z-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} h^n \varphi_a^{n+1}(z)$$

Cette série étant normalement convergente car $\left|\frac{h^n}{z-a^{n+1}}\right|$ $\leq 2^{-n} d^{-1}$ On a $\psi_N(z) = \sum_{n=0}^{N} h^n \varphi_a^{n+1}(z)$ suite d'élément de $P(K)$ et $\psi_N \to \varphi_{a+h}$ dans $C(K)$ d'où $\varphi_{a+h} \in P(K)$ et ainsi $a+h \in A$ donc A ouvert

Conclusion : K^c étant connexe on a $A = K^c$

donc $\forall a \in K^c$, $\varphi_a \in P(K)$