Def : $\varphi : x \to e^{zx/2\pi}$ $\quad x \in]-\pi,\pi[\,,\ z \in \mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$

$f : z \to \dfrac{z}{e^z - 1}$

f DSE en 0, on définit les nombres de Bernoulli b_n par
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

On va se servir du dev en série de Fourier de φ pour exprimer différemment le DSE de f

φ continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefs de Fourier.

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{zx/2\pi} e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\left[e^{zx/2\pi} e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}}{\frac{z}{2\pi} - in} = \frac{(-1)^n\left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)}{z - 2i\pi n}$$

φ étant C^1 par morceaux d'après le th de Dirichlet on a
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}\left(\varphi(x^+) + \varphi(x^-)\right) = \left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{inx}}{z - 2i\pi n}$$

En particulier pour $x = \pi$ on a

$$\frac{1}{2}\left(e^{z/2} + e^{-z/2}\right) = \left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z - 2i\pi n}$$

$$= \left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z + 2i\pi n}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

On divise par $e^{z/2} - e^{-z/2}$ et en regroupant les termes correspondant aux valeurs opposées de n on trouve.

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(e^{z/2} + e^{-z/2}\right)}{\left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

On a $\dfrac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2(e^{z/2}-e^{-z/2})} = \dfrac{e^{z}+1}{2(e^{z}-1)} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^{z}-1}$

En multipliant par z et en soustrayant $\frac{z}{2}$ on obtient

$$f(z) = 1-\frac{z}{2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2} \quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$$

Il reste alors à DSE la fonction $\dfrac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$ or pour $|z|<2\pi$

on a $\left|\frac{z}{2\pi}\right|<1$ et

$$\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2}\,\frac{1}{1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}} = \underbrace{\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(4\pi^2n^2)^k}}_{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2(k+1)}}{(4\pi^2n^2)^{k+1}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

$\left(=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z^2|}{4\pi^2n^2-|z^2|} \sim \frac{1}{n^2}\right)$

Or on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left|(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}\right|<+\infty$ Donc d'après le théorème de Fubini Lebesgue on a

$$f(z) = 1-\frac{z}{2}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$= 1-\frac{z}{2}+2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}z^{2k} \quad |z|<2\pi$$

D'après l'unicité du DSE on en déduit

$\dfrac{b_{2k}}{(2k)!} = (-1)^{k-1}\dfrac{2\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}$ D'où $\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\dfrac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}b_{2k}$

Or on a $\underset{z}{\overset{\shortparallel}{f(z)(e^z-1)}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!(n-k)!}\right)z^n$

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0$ pour $n\geq 2$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}b_k = -n\,b_{n-1}$

D'après le DSE on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2k+1} = 0$

Et d'après la relation de récurrence $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, ...

Et d'où $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$