VH
11/05/15

Méthode de Newton

218, 223, 226, 232

Réf : Rouvière, Dumas

Soit $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a)=0$, où $a\in]c,d[$

On définit la suite (x_n) par : $x_0\in[c,d]$ et $x_{n+1}=\begin{cases} x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} & \text{si } f'(x_n)\neq 0 \\ x_n & \text{sinon.}\end{cases}$

Théorème :

① Si $f'>0$ sur $[c,d]$, alors il existe $\alpha>0$ tel que $I_\alpha=[a-\alpha,a+\alpha]$ est stable par $F: x\mapsto x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ et $\forall x_0\in I_\alpha$, (x_n) converge quadratiquement vers a.

② Si de plus $f''>0$ sur $]a,d]$, alors $[a,d]$ est stable par F et pour $x_0\in]a,d]$, (x_n) est strictement décroissante

~~et~~ $\cancel{x_{n+1}-a\sim\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2}$. → Ne pas faire

③ Si $f'(a)=0$, et $f''>0$ sur $[c,d]$, on pose $F(a)=a$ et il existe $\alpha>0$ tel que $I_\alpha=[a-\alpha,a+\alpha]$ est stable par F. Si $x_0\in I_\alpha$, (x_n) converge géométriquement vers a.

dém : ①
$$F(x)-a=x-a-\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{f(a)-f(x)-(a-x)f'(x)}{f'(x)}\quad \text{car } f(a)=0$$

D'après l'égalité de Taylor Lagrange, il existe $z\in]a,x[$ tel que
z entre a et x

$$F(x)-a=\frac{1}{2}\,\frac{f''(z)(a-x)^2}{f'(x)}.$$

On pose $C=\dfrac{\max|f''|}{2\min f'}$ et $\alpha>0$ tel que $C\alpha<1$.

Si $x\in I_\alpha$, $|F(x)-a|\leq C|a-x|^2\leq C\alpha^2\leq\alpha$ donc $F(x)\in I_\alpha$.

I_α est stable par F.

De plus, $|x_{n+1}-a|=|F(x_n)-a|\leq C|x_n-a|^2$

donc $|x_n-a|\leq\frac{1}{C}(C|x_0-a|)^{2^n}$ (étape intermédiaire : $C|x_{n+1}-a|\leq(C|x_n-a|)^2$)

d'où le résultat.

② Si $x\in\,]a,d]$, $f(x)\geq 0$, $f'(x) > 0$ (inégalités strictes si $x>a$)

donc $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \leq x$ ($< x$ si $x>a$)

$< x \leq d$

D'après ①, $F(x) - a = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2 \geq 0$ (>0 si $x>a$)

Ainsi $]a,d]$ est stable par F. Si $x_0\in\,]a,d]$, (x_n) est strictement décroissante, donc converge vers un point fixe de F, i.e a. ~~D'après ①, il existe $z_n \in\,]a, x_n[$,~~

$$\cancel{\frac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\,\frac{f''(a)}{f'(a)}}.$$

③ On a

$$F(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = a \\ x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} & \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor-Young, comme $f\in C^2$,

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + o((x-a)^2) \\ f'(x) &= (x-a) f''(a) + o(x-a) \\ f''(x) &= f''(a) + o(1) \end{aligned}\right\} \text{ quand } x\to a.$$

Pour $x\neq a$, $F(x) - a = \dfrac{(x-a)f'(x) - f(x)}{f'(x)} = \dfrac{(x-a)^2 f''(a) - \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + o((x-a)^2)}{(x-a)f''(a) + o(x-a)}$

$= \dfrac{x-a}{2} + o(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

$F(x) - a = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{f''(z)(a-x)^2}{f'(x)}$

$= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{f''(z)(x-a)}{f'(x)/(x-a)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ car $f''(z) \to f''(a)$ et $\dfrac{f'(x)}{x-a} = \dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f''(a)$.

Ainsi, F est continue, et de plus, pour $x\neq a$,

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{\frac{(x-a)^2}{2} f''(a)^2 + o((x-a)^2)}{(x-a)^2 f''(a)^2 + o((x-a)^2)} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Par théorème de continuité de la dérivée, F est continue sur $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, F est C^1 sur $]a-\varepsilon, a[\,\cup\,]a, a+\varepsilon[$ et $F'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2}$, donc F est de classe C^1 au voisinage de a et $F'(a) = \frac{1}{2}$.

Il existe $\alpha>0$ tel que $\sup_{I_\alpha} |F'| \leq k < 1$. Alors I_α est stable par F et on a $|x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|$ dès que $(x_0)^{(b)} \in I_\alpha$ par théorème des accroissements finis. $|x_n - a| \leq k^n |x_0 - a|$ avec $k<1$, d'où le résultat.