LL43 : Series entière ; ptés de la somme

Def 1 : On appelle s.e toute serie de f° $\sum f_n$ dans laquelle $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0\in\mathbb{C}$.

Def 2 : On appelle somme de la SE $\sum a_n(z-z_0)^n$ l'appli S def en tout point où elle cv au sens par : $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

I - Rayon de convergence [EA]

Pour plus de simplicité, on considère désormais 1 SE centrée en 0. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$

Lemme 3 (Abel) Soit $z_0\in\mathbb{C}$ tq $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. Alors $\forall z\in\mathbb{C}$ tq $|z|<|z_0|$ $\sum a_n z^n$ cv absolument

Thm/def 4 $\exists!\, R\geq 0$ tq
- $|z|<R \Rightarrow \sum a_n z^n$ cv abs
- $|z|>R \Rightarrow \sum a_n z^n$ dv

R s'appelle alors le rayon de cv de la se et on a alors $R = \sup\{r\geq 0 : (a_n r^n)_n \text{ bornée}\}$.

Def 5. Si on note R le rayon de cv de $\sum a_n z^n$, le disque de cv est le disque ouvert, $D(0,R)$, il est vide si $R=0$ et coïncide avec $\mathbb{C}$ si $R=+\infty$

Ex 6 ① $\sum z^n$ a un RC $=1$, ② $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$ a un RC $=1$
③ $\sum_n \frac{z^n}{n}$ a un RC $=1$.

Rq 7 : On ne connait pas le comportement de la s.e sur le cercle $\{z\in\mathbb{C} : |z|=R\}$

Ex 8. $\sum z^n$ diverge en tout point de $\mathbb{C}$ tq $|z|=1$
- $\sum \frac{z^n}{n^2}$ dont le RC $=1$ cv en tout pt de $\mathbb{C}$ tq $|z|=1$
- $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge au point $z=1$ mais cv en tout autre point tq $|z|=1$ (règle d'abel)

Prop 9 : Soit R le RC de $\sum a_n z^n$ alors si la suite de terme general $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ cv vers $L\in\overline{\mathbb{R}}^+$ alors $R = 1/L$

Ex 10 $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un RC $=+\infty$. Cela permet de definir
exp : $z \longmapsto \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

Thm 11 Le Rayon de cv de $\sum a_n z^n$ est donné par $R = \frac{1}{L}$ avec $L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$

Ex 12 • Le RC de $\sum 2^n z^{2n}$ est $R = 1/\sqrt{2}$
• Le RC de $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ est 2.

Prop 13 Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e, si
- $|a_n|\leq|b_n|$ $\forall n\in\mathbb{N}$ alors $R_a \geq R_b$
- $a_n = O(b_n)$ alors $R_a\geq R_b$
- $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$

Ex 14 : • $\forall n\in\mathbb{N}$ $e^{-1}\leq e^{\cos n}\leq e^1$ et $\sum e z^n$ et $\sum e^{-1} z^n$ ont 1 RC $=1$, ainsi, le RC de la se $\sum e^{\cos(n)} z^n$ est 1

Appli 15 : Si $a_n = F(n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ où F est une fract° rationnelle alors le RC de $\sum a_n z^n$ est 1.

II - Operations sur les series entières [EA

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e

Def 16 On appelle serie produit la s.e $\sum c_n z^n$ def par $\forall n\in\mathbb{N}$ $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, serie somme la s.e $\sum(a_n+b_n)z^n$ et serie produit par $\lambda\in\mathbb{C}$ la s.e $\sum(\lambda a_n)z^n$.

Prop 17 Notons R_a et R_b les RC de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$
- Le RC R de la serie somme verifie $R\geq\min(R_a, R_b)$ avec egalité si $R_a\neq R_b$.
- En multipliant $\sum a_n z^n$ par $\lambda\neq 0$, on ne change pas le rayon de convergence
- Le Rayon de cv R de la serie produit verifie $R\geq\min(R_a, R_b)$

Appli 19 : $\forall a,b\in\mathbb{C}$ $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$ et $\forall a\in\mathbb{C}$, $e^a\neq 0$ et $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.

Ex 20 On considere $a_0=2$ $b_0=-1$ et $a_n = 2^n$ $\forall n\geq 1$ $b_n = 1$ si $n\geq 1$. On a $R_a = \frac{1}{2}$ $R_b = 1$ et $c_n = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. La serie produit est la serie nulle, de RC ∞.

Appli 21 Soit f la somme d'1 se $\sum a_n z^n$. Si $a_0\neq 0$ et $R>0$ alors $1/f$ est la somme d'1 se de RC $\neq 0$ [Rq]

Def 22 : On appelle serie entiere dérivée de $\sum a_n z^n$ la se. $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$

Prop 23 La SE et sa SE dérivée ont le même rayon de convergence.

Rq 24 : en appliquant le resultat à une se ptive ie $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ on voit que cette se a m̂ RC que $\sum a_n z^n$.

III - Ptés de la fonction somme

Soit $\sum a_n z^n$ une SE de RC R et de somme f

a) Continuité

Thm 25 $\sum a_n z^n$ cv normalement sur tout compact $K \subset D(0,R)$

Rq/Contrex 26: En général il n'y a pas de cv unif sur $D(0,R)$: $\sum z^n$ a un RC $=1$ mais $\sum z^n$ ne cv pas unif sur $D(0,1)$ car z^n ne cv pas unif vers 0 sur $D(0,1)$

Thm 27 f est continue sur $D(0,R)$

Ex 28 exp est continue sur $\mathbb{C}$

Thm 29 (Abel Angulaire) Si $R \geq 1$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et $\Delta_{\theta_0} = D(0,1) \cap \{1-\rho e^{i\theta} \mid \rho>0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]\}$. Alors $f(z) \xrightarrow[z\in\Delta_{\theta_0},\, z\to 1]{} \sum a_n$

Appli 30 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

Rq 31: Si $\sum a_n$ cv absolument, la SE conv unif sur $\bar{D}(0,1)$ et f est continue en 1 : le résultat est trivial

Contrex 32 La réciproque est fausse : $\lim_{z\to 1, |z|<1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{2} = \lim_{z\to 1, |z|<1} \frac{1}{1+z}$ et pourtant $\sum (-1)^n$ div. On a cependant la récipq partielle suivante.

Thm 33 Si $R \geq 1$ et si $\ell \in \mathbb{C}$ tq $\lim_{z\to 1, z\in\mathbb{R}} f(z) = \ell$ alors $a_n = o(1/n)$ et $\sum a_n$ cv vers ℓ

b) dérivabilité et holomorphie

(CA) **Thm 34** La f° f est holomorphe sur $D(0,R)$ et la dérivée complexe f' est la somme de la série dérivée de $\sum a_n z^n$ sur $D(0,R)$

(CA) **Cor 35** f est C^∞ sur $D(0,R)$ et on a, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Ex 36 La f° exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée $= \exp$

Appli 37 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nb de partit° de $[1,n]$ avec pour convent° $B_0 = 1$. Alors (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_n = \exp(-1) \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!}$

IV - Fonctions analytiques [T]

a) déf et ptés

Déf 38 Soit f une f° définie ds un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en z_0 si il existe une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de cv non nul, et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tq $\forall z \in V$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

Ex 39: $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est dse en 0 car $\forall z \in D(0,1)$ $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. De même, si $a \in \mathbb{C}^*$, $g(z) = \frac{1}{a-z}$ est dse en 0 car $\forall z \in D(0,|a|)$, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$

Prop 40 Soit f déf au voisinage de z_0 ; si f est dse en z_0, le développement en SE est unique et on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Déf 41: Une f° f définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est analytique sur U si elle est développable en SE en tout pt de U.

Ex 42: $z \longmapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ car si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z-a| < |a|$ on a $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n$

Thm 43: Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de CV $R>0$ et sa somme f est analytique sur $D(0,R)$ et $\forall z_0 \in D(0,R)$, $\forall z \in D(z_0, R-|z_0|)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$.

Rq 44: D'après le thm 34, si f est analytique sur U alors f est holomorphe sur U

Thm 45: Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et f analytique sur U. Les prop sont $\Leftrightarrow$

(i) f est nulle sur U

(ii) f est nulle sur un voisinage de a

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(a) = 0$

Cor 46 U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f, g \in A(U)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, $f = g$

Thm 46: U ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in A(U)$ $f \neq 0$. Alors tout zéro de f est isolé

Cor 47: $\forall K \subset U$ compact, f admet un nombre fini de zéros. [CA]

b) DSE de quelques fonctions :

À partir du dse de $\frac{1}{1-z}$ et du thm 34, on a :

Ex 48 $\forall t \in]-1,1[$ $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$

Pour trouver le dse d'1 f° f on peut aussi démontrer que f est solution d'1 problème de Cauchy et chercher des solut° de l'éq diff sous forme de série entière.

Ex 49: Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et $f(t) = (1+t)^\alpha$, on considère (E) : $(1+t)y' - \alpha y = 0$. On vérifie que f solut° de (E) sur $]-1,1[$ et on a $f(0) = 1$. On cherche alors une SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de RC $R>0$ dont la somme S vérifie $S(0) = 1$ et $\forall |t| < R$, $(1+t)S'(t) - \alpha S(t) = 0$. On trouve que l'unique solut° est : $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$ et le RC de cette SE est 1 d'où : $\forall t \in]-1,1[$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n.$$

Ex 50 (équation de Bessel) On considère (E) : $xy'' + y' + xy = 0$ [FGN 4]. On trouve une unique solut° dse au voisinage de 0 tq $f_0(0) = 1$: $f_0(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ qui est déf sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs $g : x \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta) d\theta$ est aussi solut° de (E) et on peut mq (f_0, g) est liée. On conclut que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x\sin\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Rq 51 On aurait pu simplement vouloir trouver une solut° de l'équation de Bessel.

V- ~~Les~~ fonct° generatrices : des series entières particulières [Appel]

On considère X une v.a discrète à valeur dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = P(X=n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Def 52 On definit la fonction generatrice de X comme la s.e :
$G(t) = \sum_{n\geq 0} p_n t^n$

Thm 53 : - Le rayon de cv de $\sum p_n t^n$ est au moins = à 1
- G est déf sur $[-1;1]$ au moins et est C^∞ sur $]-1;1[$ au moins. De plus, $G(1)=1$ $0\leq G(t)\leq 1$ $\forall t\in[0;1]$ et G est absolument monotone sur $[0;1]$ ie toutes ses derivées successives sont positives. En particulier G est ↗ et convexe.
- $\forall n\in\mathbb{N}$ $p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$
- En particulier, la f° generatrice caracterise la loi

Ex 54 : $X\sim B(p)$ $G(t) = 1-p+pt$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

Thm 55 X et Y deux v.a.d à valeur dans $\mathbb{N}$, independantes.
Alors $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$

Ex 56 : $X\sim B(n,p)$ $G(t) = (1-p+pt)^n$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

Appli 57 : On étudie une population partant à la generat° 0 de 1 individu. $\forall n$, on considère une double suite $(X_k^n)_{k\geq 1, n\geq 0}$ de va à valeurs ds $\mathbb{N}$ où X_k^n est le nb de descendants de l'individu k de la generat° n. On note $\forall n$, Z_n le nombre d'individus à la generat° n et on note $x_n = P(Z_n=0)$. On suppose les $(X_i^n)_{k,i}$ indep et de même loi et on note G leur fonct° generatrice commune. Si $p_n = P(X_i^k = n)$, on suppose $p_0\in]0;1[$.
Alors $x_{n+1} = G(x_n)$ et si $m = E(X_i^k)$ alors $m\leq 1 \Rightarrow \lim x_n = 1$ et l'extinct° est certaine. et $m>1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha\in]0;1[$ et la proba d'extinct° est α.