Leçon 219 : Extremums : existence ; caractérisation ; recherche ; exemple et applications

Développements : gradient à pas optimal (thm 18) / extremas liés (thm 27 et 28)

References
[Rou] Rouvière
[Av] Avez
[T] Todjihounde
[BE] Beck, Malik, Peyré
[Dem] Demailly
[Gou] Gourdon
[FG] Francinou, Gianella, Nicolas An 4
[Qua] Quarteroni
[BR] Brezis
[Lau] Laudenbach

voir Pommelet pour les demos et pour ptie compacts

I - Introduction

[Rou] **Def 1** : Soit E un espace vectoriel normé, $A\subset E$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f présente un minimum relatif en $a\in A$ si il existe U un voisinage ouvert de a tel que $f(a)\leq f(x)$ $\forall x \in U\cap A$. On dit que f présente un minimum global en a si $\forall x\in A$ $f(a)\leq f(x)$. Dans les 2 cas le minimum est dit strict si l'inégalité est stricte. Les définitions correspondantes pour les maximums s'en déduisent en renversant le sens des inégalités

Ex 2 : $f : x \longmapsto x^2$ a un minimum global strict en 0

II - Le cas particulier des espaces compacts

[Gou] **Prop 3** Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : (E,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue : alors f est bornée et atteint ses bornes.

[Gou] **Application 4** Soit (E,d) un espace métrique Alors $K\subset E$ compact et $F\subset E$ fermé dans E. Alors $\exists (k,f)\in K\times F$ tel que $d(f,k) = d(F,K)$

[Dem] **Application 5** Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $a<b$, on munit $\mathcal{C}([a;b])$ de la norme uniforme. Alors pour $f\in\mathcal{C}([a;b])$ et $n\in\mathbb{N}$ $\exists! P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire tel que

$$\|f-P_n\| = \inf_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \|f-P\|$$

III - Critères différentiels

[Rou] **Théorème 6**. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a\in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ alors :

(1) Si f admet en a un extremum local et que f est différentiable en a, alors $D_af = 0$

(2) Si f admet en a un extremum local et que f est 2 fois différentiable en a alors $D_af=0$ et D^2_af est une forme quadratique positive

(3) Si f est 2-fois différentiable en a, que $D_af=0$ et que D^2_af est définie positive alors f admet un minimum local strict en a

[Rou] **Exemple 7** - U doit être ouvert : $[0,1]$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f : x\longmapsto x$ admet son maximum en 1 mais $f'(1)\neq 0$

- $x\longmapsto x^3$ est un contre exemple à la réciproque de (1) et de (2) et $x\longmapsto x^4$ un contre exemple à celle de (3)

[Gou] **Exemple 7 bis** : Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

et soit $f : U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a\in U$ tq $D_af = 0$ et

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

alors

- si $rt-s^2>0$ et $r>0$, f admet un minimum relatif en a
- si $rt-s^2>0$ et $r<0$, f admet un maximum relatif en a
- si $rt-s^2<0$ f n'a pas d'extremum en a
- si $rt-s^2=0$ on ne peut pas conclure sur l'existence ou non d'un extremum relatif en a.

on peut ajouter coercive $\Rightarrow$ admet un minimum et l'atteint et D'alembert Gauss comme conséquence

[Rou] **Exemple 8** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 - y^2 + y^4/4$ admet un minimum local strict (qui est même global) en $(0, \sqrt{2})$ et en $(0, -\sqrt{2})$ mais le point $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

IV - Le cas particulier des fonctions convexes

[Be] **Def 9** Soit E un espace vectoriel et C un convexe de E. $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall (a,b) \in C^2, \forall \lambda \in [0,1]$
$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$

Exemple 10. $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -\ln(x)$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

[Be] **Prop 11** Soit C un convexe non vide et f convexe sur C. alors
(1) Les conditions (1) et (2) du théorème 6 sont également suffisantes à l'existence d'un minimum relatif
(2) L'ensemble des points réalisant le minimum est un convexe
(3) si f est strictement convexe alors il existe au plus un point $\bar{x} \in C$ minimisant f sur C.

Def 12 Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. f est dite coercive si
$f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$

appli de la compacité

Prop 13 Soit E espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit C un fermé de E. Si f est coercive alors f est minorée sur C et atteint son minimum.

[Be] **Exemple 14** Si $(E, \langle \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n, b un vecteur de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique défini positif. L'application
$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \langle u(x), x \rangle - \langle b, x \rangle$
admet comme unique point de minimum sur E le point $\bar{x} = u^{-1}(b)$ [Be]

Def 15 Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. f est dite α-convexe si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\forall \lambda \in]0,1[$
$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y) - \alpha t(1-t)\|x-y\|^2$

[T] ou gourdon

Prop 16 $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a équivalence entre
(1) ϕ est α-convexe
(2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$
$\phi(y) \geq \phi(x) + \langle \nabla \phi(x), y - x \rangle + \alpha \|x - y\|^2$

[T] ou gourdon

Remarque 17 Une fonction α-convexe est en particulier strictement convexe.

V - Optimisation numérique

[Be] **Thm 18** Soit $\phi \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction α-convexe. ϕ admet un minimum (local et global) atteint en x^*.
$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé, on considère la suite $x_{n+1} = x_n + \lambda_n \nabla \phi(x_n)$ où $\lambda_n = 0$ si $x_n = x^*$ et λ_n est tel que $\phi(x_n + \lambda_n \nabla\phi(x_n)) = \min_{\mu \in \mathbb{R}} \{\phi(x_n + \mu \nabla \phi(x_n))\}$
Alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}^d$, cette suite est bien définie et converge vers x^* [FG]

voir figure 1

Application 19 La méthode du gradient à pas optimal ci-dessus peut être utilisée pour approcher la solution $\bar{x}$ de $A\bar{x} = b$ pour $A \in Sym^{++}(\mathbb{R})$.
Cela revient à trouver le minimum de f dans l'exemple 14 si on définit A comme la matrice de u dans une base quelconque. On obtient la suite [Gou]
$x_{n+1} = x_n + \lambda_n \nabla f(x_n)$
où $\lambda_n = \dfrac{\langle \nabla f(x_n) ; \nabla f(x_n) \rangle}{\langle A \nabla f(x_n) ; \nabla f(x_n) \rangle}$
et $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{x}$

VI - Optimisation sous contrainte

[Lau] **Def 20** $S\subset\mathbb{R}^n$ est une sous variété de dimension m si $\forall a\in S$, $\exists$ un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $h: U\to V$ tel que $h(U\cap S) = V\cap(\mathbb{R}^m\times\{0\})$

voir figure 2

[Lau] **Exemple 21** $W\subset\mathbb{R}^m$ ouvert, $\varphi: W\to\mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^\infty$, $G(\varphi)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p,\ x\in W \text{ et } y=\varphi(x)\}$ est une sous variété de dimension m de $\mathbb{R}^{m+p}$

[Lau] **Def 22** $f: U\to\mathbb{R}^p$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, avec $U\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert, est appelée submersion si $\forall x\in U$ D_xf est de rang p (ie. surjective)

[Lau] **Prop 23** $S\subset\mathbb{R}^n$ est une sous variété de dimension m $\Leftrightarrow$ $\forall a\in S$, $\exists U$ un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion $f: U\to\mathbb{R}^{n-m}$ telle que $f^{-1}(\{0\}) = U\cap S$.

Exemple 22
- La sphère unité de $\mathbb{R}^3$ est une sous variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. On la notera S_2 voir figure 3
- $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de dimension n^2-1 de $M_n(\mathbb{R})$ [AV]

Def 23 Soit $S\subset\mathbb{R}^n$ une sous variété $m\in S$. On appelle plan tangent à S au point m l'ensemble
$T_mM=\{v\in\mathbb{R}^n;\ \exists I$ intervalle ouvert contenant 0 et γ différentiable : $I\to\mathbb{R}^n$ tels que $\gamma(t)\in M\ \forall t\in I$, $\gamma(0)=m$ et $\gamma'(0)=v\}$ [AV]

Prop 24 La définition précédente est équivalente à :
$T_mS = \ker D_mf$ où f est la submersion définie en proposition 23. [AV]

Exemple 25
$T_{I_n}Sl_n(\mathbb{R})=\{M\in M_n(\mathbb{R});\ Tr(M)=0\}$
$T_{(0,0,1)}S_2=\{(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3;\ h_3=0\}$ voir figure 3 [AV]

Def 26 Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert coupant M. On dit que $f: U\to\mathbb{R}$ présente un extremum relatif lié en $m\in U\cap M$ si la restriction de f à M présente un extremum relatif en m [AV]

Thm 27 Pour qu'une fonction f différentiable présente un extremum lié en m sur M, il faut que $D_mf|_{T_mM}\equiv 0$ [AV]

Thm 28 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g_1,\dots g_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur U, à valeurs réelles et dont les différentielles sont linéairement indépendantes. On sait que $\bigcap_{i=1}^{k} g_i^{-1}(\{0\})$ est une sous variété M de $\mathbb{R}^n$. Soit $f: U\to\mathbb{R}$ différentiable : pour que f présente un extremum lié en $m\in U$ sur M il faut qu'il existe $c_1,\dots c_k$ constantes telles que $D_mf=\sum_{i=1}^{k}c_iD_mg_i$ [AV]

Application 29 Soit E un espace euclidien $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u [Be]

Appli 30 : Soit $\Gamma=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 : z^2+xy=0$ et $x^2+y^2=1\}$. Les points de Γ les plus proches de l'origine sont $M_1=(0;1;0)$ $M_2:(0;-1;0)$ $M_3(1;0;0)$ et $M_4(-1;0;0)$ [T]

Application 31 Une usine produit un fil mélangé de coton et polyamide. La quantité de fil produite est donnée par $Q(x,y)=xy-x-y+1$ où x est le poids du coton et y celui du polyamide. Si c est le prix du coton par kg et p celui du polyamide, on peut calculer la proportion coton/polyamide pour produire en quantité maximale à un coût donné. [T]

VII En dimension infinie : cas des espaces de Hilbert.

Thm 32 Soit H un espace de Hilbert et $K\subset H$ un convexe fermé non vide. $\forall f\in H$, $\exists!$ $u\in K$ tel que $\|f-u\|=\min_{v\in K}\|f-v\|$ [Br]

et u est caractérisé par
$$\begin{cases} u\in K \\ \langle f-u;\ v-u\rangle\leq 0 \quad \forall v\in K\end{cases}$$

Application 33 Soit H un espace de Hilbert H' son dual. $\forall\varphi\in H'$ $\exists!$ $f\in H$ tel que
$$\varphi(v)=\langle f,v\rangle \quad \forall v\in H$$ [Br]