[R] On considère $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ des corps commutatifs.
À tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ on associe la f° polynomiale $\tilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Prop 1 : L'appli $P \longmapsto \tilde{P}$ de $\mathbb{K}[X]$ ds $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ est un morphisme d'algèbre et son image est l'algèbre des f° polynomiales à coef ds $\mathbb{K}$.

Cex 2 : Ce morphisme n'est pas toujours injectif par ex $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $P(X) = X(X-1)$ non nul mais $\tilde{P} = 0$ car $\tilde{P}(\bar{0}) = \tilde{P}(\bar{1}) = 0$. En conséquence, on ne peut pas toujours identifier un polynôme et sa f° polynomiale.

I- Racines d'un polynôme en lien avec la dérivât° et l'irréductibilité

1- Définition et ptés : [R]

Def 3 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P si $P(\alpha) = 0$

Ex 4 : un polynôme constant non nul n'a pas de racine et le polynôme nul a tous les éléments de $\mathbb{K}$ comme racine.
$j = e^{2i\pi/3}$ est racine de $P(X) = X^3 - 1 \in \mathbb{C}[X]$

[GOZ] **Ex 5** : Soit $P(X) = a_0 + \dots a_n X^n$ un polynôme à coeff dans $\mathbb{Z}$ avec $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \wedge q = 1$ est racine de P alors $p | a_0$ et $q | a_n$

Prop 6 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$. α est racine de $P \iff X - \alpha$ divise P

Def 7 : Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. α est racine d'ordre m de P si $(X-\alpha)^m | P$ mais $(X-\alpha)^{m+1} \nmid P$

Prop 8 : Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$, $\alpha_1, \dots \alpha_k$ dans $\mathbb{K}$ et $m_1, \dots m_k$ dans $\mathbb{N}^*$ alors on a équivalence entre
i) $\forall k \in [\![1, k]\!]$ α_k racine de P de multiplicité m_k
ii) $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(X) = Q(X) \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$ et $Q(\alpha_i) \neq 0$ $\forall i \in [\![1, k]\!]$

Appli 9 : Cela donne une méthode de calcul du déterminant de Vandermonde : $| \quad | = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$

Cor 10 : Si $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 1 a $r \geq 1$ racines de multi $m_1, \dots m_r$, alors $\deg(P) \geq m_1 + \dots m_r$

Cor 11 : Si $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$, il admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité.

Cex 12 : Ce résultat est faux pour des poly à coef ds un anneau commutatif : $\bar{3} X \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$ est de degré 1 et a 2 racines $\neq$ $\bar{2}$ et $\bar{0}$

[Dem] **Appli 13** : $\forall n \geq 0$ on définit $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Alors T_n est un polynôme $\forall n \in \mathbb{N}$, de degré n, avec $\forall n \geq 1$ $T_{n+1}(x) + 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$. Les racines de ces poly sont exactement $\cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)$ $i \in [\![0, n-1]\!]$

Cor 14 : Si le corps $\mathbb{K}$ est infini le morphisme $P \to \tilde{P}$ de la prop 1 est injectif.

Cex 15 : En plus du Cex 2, on peut généraliser ce résultat à tout corps fini $\mathbb{F}_q$ où $q = p^n$ avec p 1er : $P(X) = X^q - X$ est non nul alors que $\tilde{P} = 0$

Def 16 : $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur ce corps si il est cst ou de degré $n \geq 1$ et admet $r \geq 1$ racines de multiplicités resp $m_1, \dots m_r$ avec $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$. Si $m_i = 1$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$ on dit que P est scindé à racines simples.

Ex 17 : X^2+1 scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
$X^q - X$ est scindé sur $\mathbb{F}_q$

2- Racines et lien avec l'irréductibilité [GOZ]

Def 18 : Soit $P \in A[X]$ où A un anneau. P est dit irréductible si $\forall R, Q \in A[X]$ tq $P(X) = Q(X) R(X) \Rightarrow Q$ ou R inversible

Prop 19 : Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré > 1 n'a pas de racine

Cex 20 : La réciproque est fausse : $(X^2+1)^2$ est sans racine sur $\mathbb{Q}$ mais n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$

Prop 21 : Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré 2 ou 3 alors P est irréd sur $\mathbb{K} \iff$ il n'a pas de racine sur $\mathbb{K}$.

Ex 22 : $X^2 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$

3- Lien entre dérivation et racines :

On suppose ici $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$ (en particulier $\mathbb{K}$ est ∞)

Prop 23 : $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ alors α est racine de P d'ordre $m \iff P^{(k)}(\alpha) = 0$ $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

Cex 24 : Sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ p 1er, $P(X) = (X-1)^p$ 1 est racine d'ordre p mais $P'(X) = 0$
$P^{(k)}(1) = 0$ $\forall k$ donc on ne peut pas caract la multi de 1 comme racine

localisat° des racines qq pour Sp

[Dem]

[R] [GOZ] [Sp]

Ex 36' : $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+1)}$ est un corps de rupture de X^2+1 sur $\mathbb{R}$. Il est isomph à $\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$

[Sp] **Prop 25** : $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant alors $\frac{P(X)}{pgcd(P,P')}$ est à racines simples sur $\mathbb{K}$. (ie ses seules racines sont simples.)

Cor 26 En particulier, si P et P' sont 1ers entre eux sur $\mathbb{K}[X]$ P est à racines simples.

II - Corps algebqt clos et adjonct° de racines

1) Corps a.c

[Goz] **Def 27** : $\mathbb{K}$ est dit algebriquement clos si tout poly de $\mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 1 est scindé sur $\mathbb{K}$.

[Goz] **Prop 28** : $\mathbb{K}$ a.c $\Leftrightarrow$ tout polynome de degré ≥ 1 admet au - une racine dans $\mathbb{K}$.

[Goz] **Ex 29** * $\mathbb{Q}$ n'est pas a.c car X^2-2 n'a pas de racine sur $\mathbb{Q}$ *, $\mathbb{R}$ n'est pas a.c car X^2+1 n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

[Goz, V.25] * $\mathbb{F}_q$ n'est pas a.c car si $\{a_1, \dots, a_q\}$ sont les elts de $\mathbb{F}_q$ $(X-a_1)\cdots(X-a_q)+1$ est sans racine dans $\mathbb{F}_q$

Thm 30 : (D'Alembert Gauss) $\mathbb{C}$ est algebqt clos.

[Sp] **Cor 31** : Les polynomes irred de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1. Les polynomes irreductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 dont le discriminant est negatif

[Sp] **Appli 32** : Connaitre les irred de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$ permet la décomposit° en elements simples qui perment ensuite l'integrat° de fract° rationnelles

2) Adjonct° de racines : [Goz]

Def 33 : Soit P irred sur $\mathbb{K}$. Un corps de rupteure de P est une extension de $\mathbb{K}$ de la forme $\mathbb{K}(\alpha)$ où α est une racine de P

Prop 34 $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ irred, $\exists$ un corps de rupteure de P, unique à $\mathbb{K}$ isomph près

App 35 : Construction de corps finis : si $\deg(P) = n$ et P irrad sur $\mathbb{F}_p[X]$ n 1er alors le corps à p^n elements est $\mathbb{F}_p[X]/(P)$

• $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ et $\frac{\mathbb{Q}(X)}{(X^3-2)}$ sont des corps de decomp de X^3-2 sur $\mathbb{Q}$, ils sont donc $\mathbb{Q}$ isomorphes.

Def 36 : Soit $P \neq 0 \in \mathbb{K}[X]$, on appelle corps de décomposit° de P toute extension de $\mathbb{K}$ tq
(i) P se scinde sur $\mathbb{L}$
(ii) $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de P.

Thm 37 : Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $\exists$ un corps de decomposit° de P sur $\mathbb{K}$, il est unique à $\mathbb{K}$-isomph près

Ex 38 : $\mathbb{R}(i)$ corps de decomp de X^2+1 sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}(\sqrt2)$ corps de décomposit° de X^2-2 sur $\mathbb{Q}$

III - F° symetrique élementaires :

Def 39 Soit l'act° de gp $S_n \times \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \to \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$
$\sigma \quad P(X_1, \dots, X_n) \mapsto P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$
$P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est alors dit sytq si $\forall \sigma \in S_n$ $\sigma . P = P$. [Sp]

Ex 40 : $\sigma_1 = X_1 + \dots + X_n$
$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_k}$ $k < n$. [Romb]
$\sigma_n = X_1 \cdots X_n$
sont symétriques et sont appelés les polyn sytqs élémentaires. [Sp]

Ex 41 : (Sommes de Newton) k-ième somme de Newton à n-variables $S_k = \sum_{j=1}^n X_j^k$ est un poly sytq $\forall k \in \mathbb{N}^*$ [Sp]

Prop 42 : Dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n][X]$, on a $\prod_{i=1}^n (X - X_i) = X^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma_i X^{n-i}$ [Sp]

Cor 43 (Relat° coef racines) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$; $a_n \neq 0$ Si P est scinde sur $\mathbb{K}$ ie si $P(X) = a_n \prod_{j=1}^n (X - \alpha_j)$ alors on a les Relat°
$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\quad \frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \sigma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ [Sp]

Appli 44 : L'équat° $x^4 - x^3 + ax - 4 = 0$ admet 2 racines opposées $\Leftrightarrow a = \pm 2$ et on trouve les racines $\frac{1+i\sqrt7}{2}, \frac{1-i\sqrt7}{2}, \sqrt2, -\sqrt2$ et $(2, -1, i\sqrt2, -i\sqrt2)$ [Sp]

Thm 45 : Soit P un polynome sytq de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ de degré d. Alors il existe un polynome $Q(t_1, \dots, t_n) \in A[X_1, \dots, X_n]$ tq $P = Q(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ [Sp]

Ex 45 b : $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ [Sp]

Prop 46 En posant $S_0 = n$, on a les formules :
$\forall k > n$: $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n S_{k-n} = 0$
$\forall k \leq n$: $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \dots + (-1)^k k \sigma_k = 0$

Ex 47 : * Soit $n \geq 4$ et $S = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i^3 x_j$ alors $S = \sigma_1^2 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - 2\sigma_2^2 + 4\sigma_4$. [Sp]
* $T = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$.

App 48 : Soit le système dans $\mathbb{C}^3$
$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 0 \end{cases}$ On définit P le polyn. associé à un triplet (x, y, z) de solut° par
$P(T) = T^3 - \sigma_1 T^2 + \sigma_2 T - \sigma_3 = (T-x)(T-y)(T-z)$
En trouvant tous les polynomes P associés aux solut° du système, on a les solut° du système. [Sp ex]

Thm 49 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines sur $\mathbb{C}$ avec multiplicité. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $S_i = S_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Posons $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i,j} S_{i+j} x_i x_j$ [Cal]
Si $(s, t) = sg(Q)$ alors le nb de racine sur $\mathbb{C}$ de P est $s + t = rg(Q)$. Sur $\mathbb{R}$, c'est $s - t$.

IV. Application à la réduct° en algèbre linéaire : [G]

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim n, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Prop 51 : Les valeurs propres de u sont exactement les racines du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de u. En particulier ces 2 polynômes ont exactement les mêmes racines.

Appli 52 : Si u est nilpotent, comme $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$, 0 est la seule valeur propre de u.

Thm 53 : On a équivalence entre

(1) u diago sur $\mathbb{K}$

(2) $\exists P \in \mathbb{K}[X]$, scindé à racines simples, tq $P(u) = 0$

(3) Π_u est scindé à racines simples.

Ex 54 : un projecteur est diagonalisable

Thm 55 on a équivalence entre :

(1) u trigo sur $\mathbb{K}$

(2) $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ P scindé sur $\mathbb{K}$ tq $P(u) = 0$

(3) Π_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Ex 56 : Sur $\mathbb{C}$ tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable

App 57 : (Racines de I_n) L'adhérence de $A = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : \exists p \in \mathbb{N}^* : M^p = I_n\}$ est $F = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid Sp_{\mathbb{C}}(M) \subseteq S^1\}$ où S^1 est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Cor 58 : Si Π_u est scindé sur $\mathbb{K}$, $\det(u)$ est le produit des vp et $Tr(u)$ la somme de celles-ci, à chaque fois comptées avec multiplicité.