VM
5/01/14
1

Méthode de Laplace 218, 224, 235, 239

Théorème : Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ borné ou non.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$

On suppose

(i) $\forall t > 0, \int_a^b e^{t\varphi(x)} |f(x)| \, dx < +\infty$.

ne pas réécrire

(ii) φ' ne s'annule qu'en un point x_0,

et on a $\varphi''(x_0) < 0$.

(iii) $f(x_0) \neq 0$.

Alors $F(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x) \, dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\varphi''(x_0)|}} e^{t\varphi(x_0)} f(x_0)$.

dém : D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0)^2 \psi(x)$$

où $\cdot$ ψ est $\mathcal{C}^2$ sur $I \setminus \{x_0\}$, $\mathcal{C}^0$ sur I

$\cdot$ $\psi(x_0) = \frac{1}{2} \varphi''(x_0) < 0$.

Rem : $\psi(x) = \int_0^1 (1-s) \varphi''(x_0 + s(x - x_0)) \, ds$

et $(x - x_0)^2 \psi(x) = \int_{x_0}^x (x - t) \varphi''(t) \, dt$

Il existe $J_1 =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$ sur lequel $\psi < 0$.

On définit $u(x) = (x - x_0)\sqrt{-\psi(x)}$.

u est $\mathcal{C}^0$ sur J_1, $\mathcal{C}^2$ sur $J_1 \setminus \{x_0\}$.

$\cdot$ u est $\mathcal{C}^1$ sur J_1 : pour $x \neq x_0$, $u'(x) = (x - x_0) \frac{-\psi'(x)}{\sqrt{-\psi(x)}} + \sqrt{-\psi(x)}$

On $\varphi'(x) = 2(x - x_0)\psi(x) + (x - x_0)^2 \psi'(x)$

donc $(x - x_0)\psi'(x) = \frac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{x - x_0} - 2\psi(x)$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} \varphi''(x_0) - 2\psi(x_0) = 0.$$

Donc $u'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \sqrt{-\psi(x_0)} = \sqrt{\frac{-\varphi''(x_0)}{2}}$

Ainsi, $u'(x_0) = \sqrt{\dfrac{-\varphi''(x_0)}{2}} > 0$ et $u' > 0$ sur $J_2 =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

u réalise un C^1-difféo de $J_2 =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ sur $u(J_2) = K_2$

$\boxed{u(x_0) = 0}$

Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(J_2)$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta \equiv 1$ sur $[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$.

Alors $$F(t) = \underbrace{\int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\, \theta(x)\, dx}_{F_1(t)} + \underbrace{\int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\,(1 - \theta(x))\, dx}_{F_2(t)}$$

· Etude de F_1 :

$$F_1(t) = e^{t\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}\, J_2} e^{t(x-x_0)^2 \psi(x)} f(x)\, \theta(x)\, dx.$$

On pose le changement de variable $\mathcal{C}^1$: $y = u(x)$.

$$F_1(t) = e^{t\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}\, K_2} e^{-ty^2} f(u^{-1}(y))\, \theta(u^{-1}(y))\, \frac{dy}{u'(u^{-1}(y))}$$
$$= e^{t\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-ty^2} h(y)\, dy$$

où h est C^0 à support compact dans $\mathbb{R}$ et
$$h(0) = f(x_0) \frac{1}{u'(x_0)} = f(x_0) \sqrt{\frac{2}{|\varphi''(x_0)|}}.$$

On pose le changement de variable $\mathcal{C}^1$: $z = \sqrt{t}\, y$:

$$F_1(t) = \frac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} h\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) dz$$

· $\forall t > 0$, $z \mapsto e^{-z^2} h\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)$ est ($L^1(\mathbb{R})$) mesurable

· $\forall z \in \mathbb{R}$, $e^{-z^2} h\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} e^{-z^2} h(0)$

· $\forall z \in \mathbb{R}$, $\forall t > 0$, $\left| e^{-z^2} h\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) \right| \leq \underbrace{\sup |h|\, e^{-z^2}}_{L^1}$

Par théorème de convergence dominée,

$$F_1(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}}\, h(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz}_{= \sqrt{\pi}}$$

VM
5/01/14
2

Etude de F_2 :

$$F_2(t) = \int_{\mathbb{R}a}^{b} e^{t\varphi(x)} f(x)(1-\Theta(x))\,dx$$

Le support de F_2 est $\mathbb{R} \setminus \left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right]$.

Sur ce support, $\varphi(x_0) - \varphi(x) \geq \mu > 0$.

Pour tout $t > 1$, $t\varphi(x) = \varphi(x) + (t-1)\varphi(x) \leq \varphi(x) + (t-1)(\varphi(x_0) - \mu)$

$$|F_2(t)| \leq \int_{\mathbb{R}a}^{b} e^{\varphi(x)} |f(x)|\,dx \; e^{(t-1)(\varphi(x_0)-\mu)}$$

D'après (i), on a donc

$$e^{-t\varphi(x_0)} |F_2(t)| \leq M e^{-t\mu}$$

donc $$e^{-t\varphi(x_0)} |F_2(t)| \underset{t \to +\infty}{=} o\left(e^{-t\varphi(x_0)} F_1(t)\right)$$

Ce qui prouve le théorème. □

Application (formule de Stirling).

$t > 0$
$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{t\log x - x}\,dx$$

chgt de variable $x = ty$:

$$= \int_0^{+\infty} e^{t\log(ty) - ty}\, t\,dy = t\, e^{t\log t} \int_0^{+\infty} e^{t\underbrace{(\log y - y)}_{\varphi(y)}}\,dy$$

(i) $\forall t > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{t(\log y - y)}\,dy = \int_0^{+\infty} y^t e^{-ty}\,dy < +\infty$

(ii) $\varphi(y) = \log y - y$: $\varphi'(y) = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y}$ s'annule une unique fois en $y_0 = 1$

$$\varphi''(y) = -\frac{1}{y^2} \qquad \varphi''(1) = -1 < 0.$$

(iii) $f = 1$ donc $f(1) \neq 0$.

Donc quand $t \to +\infty$

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} t\, e^{t \log t} \sqrt{\frac{2\pi}{t \cdot 1}}\, e^{-t} \qquad \text{car } \varphi(1) = -1.$$

$$\underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^{t}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{d'où} \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n}.$$