VM
1/05/15

Automorphismes de $K(X)$ 140

Réf : FGN alg 1.

Théorème : les automorphismes de K-algèbre de $K(X)$ sont les applications $\begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array}$ avec $ad-bc\neq 0$, $a,b,c,d\in K$.

dém : Soit ϕ un automorphisme de K-algèbre. Soit $F=\phi(X)$.

F est non constante car sinon $\exists \lambda\in K$ tq $\underset{\phi(X)}{F}=\lambda=\phi(\lambda)$,

absurde par injectivité de ϕ.

Pour tout $Q\in K[X]$, $\phi(Q)=\phi\left(\sum q_j X^j\right)=\sum q_j\,\phi(X)^j$
$=\sum q_j F^j = Q\circ F$.

Soit $G\in K(X)$. Alors $\exists P,Q\in K[X]$ tels que $G=\frac{P}{Q}$.

Alors $\phi(G)=\phi\left(\frac{P}{Q}\right)=\frac{\phi(P)}{\phi(Q)}=\frac{P\circ F}{Q\circ F}=G\circ F$.

Comme ϕ est surjectif, il existe $G\in K(X)$ tel que $G\circ F=X$.

Soient A,B,P,Q des polynômes tels que $F=\frac{A}{B}$, $G=\frac{P}{Q}$, $A\wedge B=1$, $P\wedge Q=1$.

On écrit $P=\sum_{j=0}^{m} a_j X^j$, $Q=\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ où $m=\max(\deg P,\deg Q)$.

Comme $G\circ F=X$, $P\circ F=X\,Q\circ F$

d'où $\sum_{j=0}^{m} a_j F^j = X\sum_{k=0}^{m} b_k F^k$

donc en multipliant par B^m : $\sum_{j=0}^{m} a_j A^j B^{m-j} = X\sum_{k=0}^{m} b_k A^k B^{m-k}$.

A divise la somme des termes où A n'apparaît pas :

A divise $a_0 B^m - X b_0 B^m$

Or $A\wedge B=1$ donc $A\wedge B^m=1$ et d'après le lemme de Gauss,

A divise $a_0 - X b_0$.

Or $(a_0,b_0)\neq(0,0)$, car sinon $P\wedge Q$ serait divisible par X,

donc $\deg A\leq 1$.

· D'autre part, B divise $a_m A^m - X b_m A^m$

donc B divise $a_m - X b_m$. Par définition de m, $(b_m, a_m) \neq (0,0)$

donc $\deg B \leq 1$.

Conclusion : il existe $a, b, c, d \in K$ tels que $F = \frac{aX+b}{cX+d}$.

Comme F est non constante, $ad - bc \neq 0$.

· Réciproquement, soient $a, b, c, d \in K$ tels que $ad - bc \neq 0$

et ϕ le morphisme de K-algèbre défini par

$\phi(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.

Soit ψ le morphisme de K-algèbre défini par

$\psi(X) = \frac{dX - b}{-cX + a}$.

Alors $\psi \circ \phi(X) = \psi\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) = \frac{d\frac{aX+b}{cX+d} - b}{-c\frac{aX+b}{cX+d} + a} = X$

Donc $\psi \circ \phi = id_{K(X)}$.

De même $\phi \circ \psi = id_{K(X)}$.

Donc ϕ est un automorphisme de K-algèbre.