VM
5/04/15
1

Ellipsoïde de John

Thm + corollaire : 106
Thm + lemme : 158, 170, 171, 219, 229, 253

Réf : Alessandri

Théorème : Pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on définit l'ellipsoïde
$$\mathcal{E}_S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q_S(x) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x S x \leq 1\}.$$
Soit K un compact d'intérieur contenant $0 \in \mathbb{R}^n$.
Alors l'ensemble des ellipsoïdes contenant K admet un unique élément de volume minimal.

Corollaire : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.
Il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\forall M \in G,\ S = {}^tMSM$,
i.e $G \subset \mathcal{O}(q_S)$
i.e G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

dém : Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $R = {}^tPSP$, où $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
Alors $x \in \mathcal{E}_R \Leftrightarrow {}^tx\,{}^tPSPx \leq 1$
$\Leftrightarrow Px \in \mathcal{E}_S$

Comme P est inversible, $\mathcal{E}_R = P^{-1}\mathcal{E}_S$.

En particulier, comme il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tQQ$,
$\mathcal{E}_S = Q^{-1}\mathcal{E}_I$ (où $I = I_n$)
donc $v(\mathcal{E}_S) = |\det Q^{-1}|\, v(\mathcal{E}_I) = \dfrac{1}{\sqrt{\det S}}\, v(\mathcal{E}_I)$.
volume de l'ellipsoïde de $\mathcal{E}_S$

On note $\mu : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$S \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\det S}} = \frac{v(\mathcal{E}_S)}{v(\mathcal{E}_I)}$$

l'application "volume relatif".

Lemme : μ est strictement convexe.

dém : $\forall t \in]0,1[,\ \forall u, v \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\ln(u^t v^{1-t}) = t\ln u + (1-t)\ln v \leq \ln(tu + (1-t)v)$$
par concavité stricte du log

donc $\quad u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$. $\quad (*)$
avec égalité ssi $u = v$

Soient $R, S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $t \in]0,1[$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$R = {}^tP \Delta P \qquad \Delta = \mathrm{Diag}(r_1, \dots, r_n) \quad r_i > 0$$
$$S = {}^tP P$$

$$\mu(R) = \frac{1}{\sqrt{\det({}^tP\Delta P)}} = \frac{1}{\det P} \mu(\Delta)$$

$$\mu(S) = \frac{1}{\det P} \mu(I_n)$$

$$\mu(tR + (1-t)S) = \frac{1}{\det P} \mu(t\Delta + (1-t)I_n).$$

$$\mu(t\Delta + (1-t)I_n) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n (tr_i + (1-t))}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(tr_i + (1-t))^{1/2}}$$

$$\underset{(*)}{\leq} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(r_i^{\,t})^{1/2}} = \mu(\Delta)^t \quad = \mu(\Delta)^t \mu(I_n)^{1-t}$$

$$\underset{(*)}{\leq} t\mu(\Delta) + (1-t)\mu(I_n)$$

Ainsi $\quad \mu(tR + (1-t)S) \leq t\mu(R) + (1-t)\mu(S)$

Cas d'égalité : $\forall i, r_i = 1 \Rightarrow \Delta = I_n \Rightarrow R = S$

μ est strictement convexe.

Soit K un compact tel que $O \in \mathring{K}$.

Comme K est borné, il existe $r > 0$ tel que $K \subset r\mathcal{E}_I = \mathcal{E}_{S_0}$

où $S_0 = \frac{1}{r^2} I_n$.

Soit $\mathcal{C} = \{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid K \subset \mathcal{E}_S,\ v(\mathcal{E}_S) \leq v(\mathcal{E}_{S_0})\}$
$= \{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid K \subset \mathcal{E}_S,\ \mu(S) \leq \mu(S_0)\}$

- $\mathcal{C}$ est non vide : $S_0 \in \mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}$ est convexe, par convexité de μ, de $S_n^{++}(\mathbb{R})$, et de $\{S \mid {}^tx S x \leq 1\}$.
- $\mathcal{C}$ est fermé : si $\underset{\in \mathcal{C}}{S_p} \to S$, alors $S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$.

VM
5/04/15
2

$\forall x \in K,\quad {}^t x S_p x \leq 1$

donc $\quad {}^t x S x \leq 1$: $K \subset \mathcal{E}_S$ ← par ici que ce soit bien défini

$\forall p,\quad \mu(S_p) \leq \mu(S_0)$

donc $\det S_p \geq \det S_0$

$\Rightarrow \quad \det S \geq \det S_0 > 0$

Ainsi, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mu(S) \leq \mu(S_0)$

Donc $S \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est borné : $0 \in \mathring{K}$ donc $\exists \lambda > 0$ tel que $\lambda \mathcal{E}_I \subset K$.

Soit x tel que $\|x\| = 1$.

Alors ${}^t x x = 1$, et $x \in \mathcal{E}_I$: $\lambda x \in K$.

Soit $S \in \mathcal{C}$. Donc $\|\sqrt{S}x\|^2 = {}^t x \sqrt{S}\sqrt{S} x = {}^t x S x = q_S(x) = \frac{1}{\lambda^2} q_S(\lambda x)$

$\leq \frac{1}{\lambda^2} \|x\|^2$ car $\lambda x \in K \subset \mathcal{E}_S$

Donc $|||\sqrt{S}||| \leq \frac{1}{\lambda}$ et $|||S||| \leq \frac{1}{\lambda^2}$.

$\mathcal{C}$ est borné.

Donc $\mathcal{C}$ est un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$.

$\mu : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est strictement convexe,

donc atteint un minimum strict sur $\mathcal{C}$.

□

dém (corollaire) :

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Soit $K = \bigcup_{M \in G} M\mathcal{E}_I$.

K est compact car c'est l'image de $G \times \mathcal{E}_I$ compact par

$(M, x) \mapsto Mx$ continue.

$0 \in \mathring{K}$ car $\mathcal{E}_I \subset K$.

Ainsi, il existe un unique $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $K \subset \mathcal{E}_S$ et S de volume minimum.

Soit $M \in G$. <u>But</u> : Mque $S = {}^tMSM$.

- On sait que $MK = K$, et $\forall p \in \mathbb{Z}$, $M^pK = K$. (car M inversible)

  Ainsi, $M^p \mathcal{E}_I \subset M^pK = K \subset \mathcal{E}_S$,

  donc $|\det M|^p \underbrace{\mu(I)}_{=1} \leq \mu(S) < +\infty$.

  Donc en faisant tendre p vers $\pm\infty$, on remarque que $|\det M| = 1$

- Soit $R = {}^tMSM$. $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

  $\det R = \det S$ donc $\mu(R) = \mu(S)$

  $\underset{MK}{\overset{\shortparallel}{K}} \subset \mathcal{E}_S = M\mathcal{E}_R$

  donc $K \subset \mathcal{E}_R$.

  Ainsi, par unicité du minimum, $R = S$ donc $S = {}^tMSM$.