VM
18/05/15
1

Méthode de Jacobi

233

Réf : Ciarlet

Proposition (admise, à mettre dans le plan)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $p \neq q$ deux entiers dans $\{1, \dots, n\}$.

$$\text{Soit} \quad \begin{array}{c|c} \Omega = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ p & & q \end{array} & \end{array} \quad . \text{ Soit } B = {}^t\Omega A \Omega .$$

Alors i) B est symétrique et vérifie $\|B\| = \|A\|$,

i.e $\displaystyle\sum_{i,j} |b_{ij}|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.

ii) Si $a_{pq} \neq 0$, il existe une unique valeur de θ dans l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ telle que $b_{pq} = 0$

θ est l'unique solution dans cet intervalle de

$$\operatorname{cotan}(2\theta) = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

iii) $$\sum_{i=1}^n b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$$

iv) $$b_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq p, q \\ a_{pp} - \tan\theta \, a_{pq} & \text{si } i = p \\ a_{qq} + \tan\theta \, a_{pq} & \text{si } i = q \end{cases}$$

Méthode de Jacobi (dans le plan)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (comptées avec leur multiplicité). On définit la suite (A_k) par

$A_0 = A$

si $k \geq 0$, $A_{k+1} = A_k$ si A_k est diagonale

$A_{k+1} = {}^t\Omega_{k+1} A_k \Omega_{k+1}$ où les coefficients (p, q) sont définis de sorte que $|a_{pq}^{(k)}| = \max_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|$.

Le développement commence maintenant :

Théorème : Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$.

dém : On démontre tout d'abord le lemme suivant

Lemme : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit (x_n) une suite bornée n'ayant qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence et telle que $\|x_{n+1} - x_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors (x_n) converge.

dém : Soient $a_1, \dots, a_p$ les valeurs d'adhérence de (x_n).

Soit $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \min\limits_{i \neq j} \|a_i - a_j\|$.

Supposons l'existence d'une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\forall n,\ x_{\varphi(n)} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(a_i, \varepsilon_0)$.

Comme cette suite est bornée, on peut en extraire une sous-suite qui converge, donc on construit une nouvelle valeur d'adhérence pour (x_n), distincte des précédentes : absurde.

Il existe N_1 tel que $\forall n \geq N_1,\ x_n \in \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(a_i, \varepsilon_0)$

—— N_2 —— N_2, $x_n \in \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(a_i, \varepsilon_0)$

et $\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon_0$.

Soit i_0 tel que $x_{N_2} \in B(a_{i_0}, \varepsilon_0)$.

Si $x_n \in B(a_{i_0}, \varepsilon_0)$, $n \geq N_2$, alors

$$\|x_{n+1} - a_{i_0}\| \leq \|x_n - a_{i_0}\| + \|x_{n+1} - x_n\| < 2\varepsilon_0$$

et $\forall j \neq i_0$, $\|x_{n+1} - a_j\| \geq \|a_j - a_{i_0}\| - \|x_{n+1} - a_{i_0}\|$

$$> 3\varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 = \varepsilon_0$$

Donc $x_{n+1} \in B(a_{i_0}, \varepsilon_0)$ et par récurrence,

VM1
18/05/15
2

$\forall n \geq N_2,\ x_n \in B(a_{i_0}, \varepsilon_0)$.

Ainsi, (x_n) est bornée et admet une unique valeur d'adhérence (a_{i_0}) donc (x_n) converge (vers a_{i_0}).

$\square$

Pour tout $k \geq 0$, on définit $D_k := \mathrm{diag}(a_{ii}^{k})$ et $B_k := A_k - D_k$.

- Montrons tout d'abord que $B_k \to 0$.

Soit $e_k := \sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|^2 = \|B_k\|^2$

D'après la proposition, on a $e_{k+1} = e_k - 2|a_{pq}^{(k)}|^2$

D'autre part, par définition de (p,q), $e_k \leq n(n-1)|a_{pq}^{(k)}|^2$

donc $e_{k+1} \leq e_k \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)}_{<0}$.

donc $e_k \to 0$ et $B_k \to 0$.

- Montrons que la suite (D_k) vérifie les conditions du lemme :
  - (D_k) est bornée car $\|D_k\| \leq \|A_k\| = \|A\|$ $\forall k$.
  - (D_k) a un nombre fini de valeurs d'adhérence.

  En effet, si $D_{\varphi(k)} \to D$, D est diagonale, $A_{\varphi(k)} \to D$, et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\det(D - \lambda Id) = \lim_k \det(D_{\varphi(k)} - \lambda Id) = \lim_k \det(A_{\varphi(k)} - \lambda Id) = \det(A - \lambda Id)$

  donc A et D ont même polynôme caractéristique

  $D = \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$ pour un certain $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

  - $D_{k+1} - D_k \to 0$: en effet,

$$a_{ii}^{(k+1)} - a_{ii}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq p,q \\ -\tan\theta_k\, a_{pq}^{(k)} & \text{si } i = p \\ \tan\theta_k\, a_{pq}^{(k)} & \text{si } i = q \end{cases}$$

On $|\theta_k| \leq \frac{\pi}{4}$ donc $|\tan \theta_k| \leq 1$

$$\text{et } |a_{p,q}^{(k)}| \leq \|B_k\| \longrightarrow 0$$

donc $\quad a_{ii}^{(k+1)} - a_{ii}^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

d'où $\quad D_{k+1} - D_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

Bilan : D_k, donc A_k, converge vers un diag $(\lambda_{\sigma(i)})$ pour un certain $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.