Générateurs de Isom(E)

O(E) + SO(E) : 106, 108, 160
Isom(E) : 159, 161, 162, 183
Réf : Combes adapté

Théorème

Soit E un espace affine euclidien de direction $\vec{E}$. Soit $f \in Isom(E)$.
On note $r_f = rg(\vec{f} - id_{\vec{E}})$, où $\vec{f}$ est la partie linéaire de f.
Alors · si f a un point fixe, f est la composée de r_f réflexions, et pas moins.
· si f n'a pas de point fixe, f est la composée de $r_f + 2$ réflexions, et pas moins.

dém : On commence par regarder la partie linéaire :

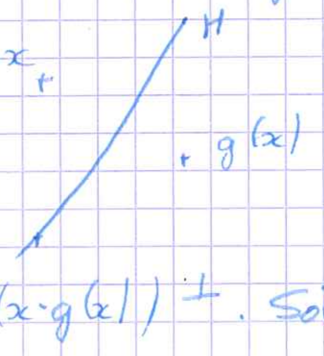
Proposition : Soit $g \in O(E)$. Soit $r_g = rg(g - id_E)$.
↳ espace euclidien

Alors g est la composée de r_g réflexions (vectorielles), et pas moins.

dém (prop) : On va montrer par récurrence sur r_g qu'il existe une décomposition de g en s réflexions, avec $s \leq r_g$.

· Si $r_g = 0$, c'est évident car $g = id_E$.

· Supposons la propriété vraie pour $r_g = r \geq 0$. Soit $g \in O(E)$ tel que $r_g = r+1$. Alors comme $Ker(g - id) \neq E$, il existe x tel que $g(x) \neq x$.



Soit H l'hyperplan $Vect(x - g(x))^{\perp}$. Soit σ la réflexion par rapport à H. Comme $g \in O(E)$, $\langle x - g(x), x + g(x) \rangle = \|x\|^2 - \|g(x)\|^2 = 0$

donc $g(x) = \underbrace{\frac{g(x) + x}{2}}_{\in H} + \underbrace{\frac{g(x) - x}{2}}_{\in H^{\perp}}$, donc $\sigma \circ g(x) = \frac{g(x) + x}{2} - \frac{g(x) - x}{2}$
$= x$.

Ainsi, $Vect(x)$ appartient à l'ensemble des points fixes de $\sigma \circ g$.
De plus, si y est un point fixe de g,

$\langle y, x - g(x)\rangle = \langle y, x\rangle - \langle g(y), g(x)\rangle = 0$ car $g \in O(E)$,

donc $y \in H$. Ainsi $\sigma \circ g(y) = \sigma(y) = y$.

Donc $\mathrm{Ker}(g - id) \oplus \mathrm{Vect}(x) \subset \mathrm{Ker}(\sigma \circ g - id)$.

Donc $rg(\sigma \circ g - id) \leq rg(g - id) - 1 = r_g - 1 = r$.

Par hypothèse de récurrence, $\sigma \circ g$ est la composée de s réflexions, avec $s \leq r$.

Donc g est la composée de $s+1$ réflexions, et $s+1 \leq r+1 = r_f$.

Ainsi la récurrence est validée. De plus, si $g = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r$, en notant H_i l'hyperplan des points fixes de σ_i,

$$\bigcap_{i=1}^{r} H_i \subset \mathrm{Ker}(g - id)$$

donc

$$n - r \leq \dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i\right) \leq \dim \mathrm{Ker}(g - id) = n - r_g$$

d'où $r \geq r_g$.

Ainsi, g est la composée de r_g réflexions, et pas moins.

□

Soit maintenant $f \in \mathrm{Isom}(E)$. $r_f = rg(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.

Ainsi $\vec{f}$ est la composée de r_f réflexions, et pas moins.

Si f admet un point fixe, on vectorialise E en ce point fixe et on se ramène directement à la proposition.

Si f n'admet pas de point fixe, il existe $\vec{u}$ et h admettant un point fixe tels que $f = t_{\vec{u}} \circ h$.

Comme $\vec{f} = \vec{h}$, et que $t_{\vec{u}}$ est la composée de deux réflexions, on a d'après le cas précédent une décomposition de f en produit de $r_f + 2$ réflexions.

Optimalité : en raisonnant sur $\vec{f}$, il est clair que le nombre minimal m de réflexions est supérieur à r_f. De plus, on peut exclure $m = r_f + 1$: si deux produits de réflexions sont égaux, alors le nombre de réflexions de chaque produit est de même parité, car une réflexion renverse l'orientation.

VM
17/04/15
2

Il reste donc à exclure $m = rf$.

Supposons par l'absurde $f = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{rf}$. $\overrightarrow{H_i}$: pts fixes de $\overrightarrow{\sigma_i}$

Alors $\bigcap_{i=1}^{rf} \overrightarrow{H_i} \subset \ker(\vec{f} - \vec{id})$ et d'après les dimensions c'est une égalité.

On note H_i l'hyperplan affine des points fixes de σ_i.

$\bigcap_{i=1}^{rf} H_i$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire (non homogène) à n inconnues et à rf équations, indépendantes.

L'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension $n - rf$, donc $\bigcap_{i=1}^{rf} H_i$ est non vide : f admet un point fixe, ce qui est exclu.

Donc $m = rf + 2$ et on a démontré le théorème.

· Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$

(plus adapté pour certaines leçons)

Théorème : Soit E un espace euclidien. Soit $f \in O(E)$.

Soit $r = rg(f - id_E)$.

Alors i) f est produit de r réflexions, et pas moins.

ii) Si $f \in SO(E)$ et $\dim E \geq 3$, f est produit ~~d'au plus~~ de r retournements. → FAUX

dém : i) est fait ci-dessus.

ii) $f = s_1 \circ \dots \circ s_r$ d'après i), et comme $\det f = 1 = \prod_{i=1}^{r} (-1) = (-1)^r$, on a r pair.

Cas 1 : $\dim E = 3$.

Alors $r = 0$ ou 2 (car $r \leq 3$ et r pair).

Si $r = 0$, $f = id$: produit de 0 retournement.

Si $r = 2$, $f = s_1 \circ s_2 = (-s_1) \circ (-s_2)$ avec $-s_1, -s_2$ des retournements.

<u>Cas 2</u> : $\dim E \geqslant 3$.

Pour $i = 1, \dots, r$, on note $H_i = \ker(s_i - id_E)$. H_i est un hyperplan.
$\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n-2$ donc il existe $V \subset H_1 \cap H_2$ un sous-espace vectoriel de dimension $n-3$.

Pour $i = 1, 2$, V est stable par s_i, donc $V^\perp$ aussi car s_i est orthogonal.

On note $t_i = s_i|_{V^\perp}$ pour $i = 1, 2$.

D'après le cas précédent, $t_1 \circ t_2 = (-t_1) \circ (-t_2)$ avec $-t_1$ et $-t_2$ des retournements de $V^\perp$.

On les prolonge par l'identité sur V pour obtenir ρ_1, ρ_2 deux retournements de E tels que $s_1 \circ s_2 = \rho_1 \circ \rho_2$ (égaux sur V et sur $V^\perp$)

Il y a un nombre pair de réflexions, donc on construit $\rho_1, \dots, \rho_r$ des retournements tels que $f = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_r$.

$\square$