VM

25/01/15

Lacunes d'Hadamard

207, 243, 244, 245

Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1 .$$

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Théorème : Tout point de $\mathbb{U}$ est singulier pour f, i.e $\forall \xi \in \mathbb{U}$, pour tout ouvert contenant $\mathbb{D} \cup \{\xi\}$, il n'existe pas de prolongement holomorphe de f.

dém : Il suffit de montrer le théorème pour 1. En effet, pour tout $\xi \in \mathbb{U}$ $f_\xi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \xi^{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ est une série entière de rayon de convergence 1, donc en appliquant le théorème, 1 est un point singulier pour f_ξ, donc ξ est un point singulier pour f.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe tels que $\Omega = \mathbb{D} \cup \mathbb{D}(1, \varepsilon)$ et $g|_{\mathbb{D}} = f$.

Soit $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n+1}\, p > \lambda_n (p+1)$.

On pose $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \frac{z^p + z^{p+1}}{2} = \frac{z^p}{2}(z+1)$$

Si $z \in \mathbb{D}$, $|\varphi(z)| \leq |z|^p < 1$.

Si $z = 1$, $\varphi(1) = 1$.

Si $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$, $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2}|1+z| < 1$.

Donc $\varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \Omega$.

Or $\varphi^{-1}(\Omega)^c$ est un fermé de $\mathbb{C}$, et $\overline{\mathbb{D}}$ un compact, donc $\eta = d(\varphi^{-1}(\Omega)^c, \overline{\mathbb{D}}) > 0$. Soit $R = \frac{1+\eta}{2}$.

Alors $\varphi(\mathbb{D}(0,R)) \subset \Omega$.

On définit $h : \mathbb{D}(0,R) \to \mathbb{C}$

$z \mapsto g \circ \varphi(z)$

h est holomorphe par composition de deux applications holomorphes.
Donc il existe une série entière $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence $\geq R$ telle que $\forall z \in \mathbb{D}(0,R)$, $h(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$.

Soit $z \in \mathbb{D}$. Alors $\varphi(z) \in \mathbb{D}$, donc $h(z) = f \circ \varphi(z)$

d'où $$\sum_{n \geq 0} a_n \underbrace{\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n}}_{P_n(z)} = \sum_{k \geq 0} b_k z^k.$$

P_n est un polynôme de degré $(p+1)\lambda_n$ et 0 est un zéro de multiplicité $p\lambda_n$. Or $(p+1)\lambda_n < p\lambda_{n+1}$, donc les monômes à coefficients non nuls intervenant dans les P_n sont deux à deux disjoints. Ainsi, soit $N \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{k=0}^{\lambda_N(p+1)} b_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ par prolongement analytique.

Soit x réel dans $]1, R[$. Soit $y = \varphi(x) > 1$.
$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{\lambda_n} = \sum_{k=0}^{\lambda_N(p+1)} b_k x^k \xrightarrow[N \to +\infty]{} h(x)$$

car $x \in \mathbb{D}(0,R)$

donc $\sum a_n y^{\lambda_n}$ converge, donc le rayon de convergence de la série entière est $\geq y > 1$: absurde.