Théorème d'Artin

(51)

Thm: Soit K un corps et G un gpe de cardinal n formé d'automorphismes de K. On pose $K^G = \{x \in K \mid \forall \sigma \in G, \sigma(x) = x\}$.
Alors $[K : K^G] = n$ et $\mathrm{Aut}_{K^G} K = G$

---

1) lemme : Soit k un corps et G un gpe et $\chi_1, \dots, \chi_n : G \to k^*$ des mph 2 à 2 distincts. Alors $\chi_1, \dots, \chi_n$ sont k-linéairement indépendants.

- Par récurrence sur n. le cas $n = 1$ est clair.
- On suppose le résultat pour $n-1$ et soient $a_1, \dots, a_n \in k$ tq $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i = 0$. $\forall x, y \in G$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i(x) \chi_i(y) = 0$
et $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i(x) \chi_n(y) = 0$

par différence : $\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\chi_i(y) - \chi_n(y)) \chi_i(x) = 0$

et donc $\forall y \in G$, $\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\chi_i(y) - \chi_n(y)) \chi_i = 0$

par hypothèse de récurrence : $\forall y \in G, \forall i = 1 \dots n-1$,
$a_i(\chi_i(y) - \chi_n(y)) = 0$

les $(\chi_i)_{i=1}^{n}$ étant 2 à 2 distincts,
$\forall i = 1 \dots n-1$, $\exists y \in G$, $\chi_i(y) \neq \chi_n(y)$ et alors $a_i = 0$.
On en déduit $a_1, \dots, a_{n-1} = 0$ puis $a_n \chi_n = 0$ puis $a_n = 0$ et le résultat.

2) lemme : Soit $K \subset L$ une extension de corps. si L a au moins n automph K-linéaires, alors $[L : K] \geq n$.

- Par l'absurde $r := [L : K] < n$. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des automph K-linéaires de L, 2 à 2 distincts et soit $(e_1, \dots, e_r) = \mathcal{B}$ une K-base de L.

Considérons le système linéaire homogène d'inconnue $x = (x_1, \dots, x_n) \in L^n$

$$\begin{cases} x_1 \sigma_1(e_1) + \dots + x_n \sigma_n(e_1) = 0 \\ x_1 \sigma_1(e_2) + \dots + x_n \sigma_n(e_2) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$\forall j = 1 \dots r$, $x_1 \sigma_1(e_j) + \dots + x_n \sigma_n(e_j) = 0$

il y a n inconnues pour $r < n$ équations et il existe donc une solution $(x_1, \dots, x_n)$ non triviale ainsi $\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i$ s'annule sur la base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ et il est donc nul. Contradiction avec le lemme 1]

3] <u>Montrons $[k : k^G] = n$</u> : On a déjà $[k : k^G] \geq n$ via lemme 2].

· Montrons que toute famille $(k_1, \dots, k_{n+1}) \in k^{n+1}$ est k^G-liée.

Soit $T_1 : x \in k \longmapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma(x) \in k^G$

par le lemme 1], $T_1 \neq 0$. De plus T_1 est k^G-linéaire.

• Considérons le système linéaire homogène :

$\forall g \in G, \quad \sum_{i=1}^{n+1} g(x_i) k_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \, g^{-1}(k_i) = 0 \\ \forall g \in G \end{cases}$

d'inconnue $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in k^{n+1}$

Ce système a $|G| = n$ équations pour $n+1$ inconnues et il a donc une solution non triviale $(x_1, \dots, x_{n+1})$.

Un des $(x_i)_{i=1}^{n+1}$, disons x_j est non nul.

$(y \in k \longmapsto x_j y \in k)$ est bijective donc $y \in k \longmapsto T_1(x_j y) \in k^G$ est non nulle : $\exists y \in k, \; T_1(x_j y) \neq 0 \quad (y \neq 0)$

• On a : $\forall g \in G, \sum_{i=1}^{n+1} g(x_i y) k_i = \sum_{i=1}^{n+1} g(x_i) k_i \, g(y) = 0$

et en sommant : $\sum_{i=1}^{n+1} T_1(x_i y) k_i = 0$, et comme $T_1(x_j y) \neq 0$, c'est une relation de liaison non triviale

4] <u>$\mathrm{Aut}_{k^G}(k) = G$</u> : $[k : k^G] = n \overset{\text{lemme 2]}}{\Longrightarrow} |\mathrm{Aut}_{k^G}(k)| \leq n$

mais $G \subset \mathrm{Aut}_{k^G}(k)$ et $|G| = n$ donc $G = \mathrm{Aut}_{k^G}(k)$