VM
24/12/14
1

150, 151, 153, 154, 159

Invariants de similitude

Réf : Gourdon.

E K-ev de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note μ_u le polynôme minimal de u.

x normal : On note $K[u](x) = \{ P(u)(x) \mid P \in K[X] \}$ et $\mu_{u,x}$ le polynôme minimal annulateur de x.

Rappel (dém à la fin du développement)

Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$.

Théorème

Il existe une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ telle que

i) F_i est stable par u $\forall i \in \{1,..,r\}$

ii) $u_{|F_i}$ est cyclique

iii) $P_i := \mu_{u_{|F_i}}$: $P_r \mid P_{r-1} \mid \dots \mid P_2 \mid P_1 = \mu_u$.

Commencer par la récurrence.

dém : Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$.

Soit $F_1 = K[u](x)$. Soit $k = \dim F_1$. $\mu_{u|F_1} \mid \mu_u$, $\mu_{u,x} \mid \mu_{u|F_1}$ donc $\mu_{u|F_1} = \mu_{u,x}$.

$(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ est une base de F_1.
$= (e_1, e_2, \dots, e_k)$ $u_{|F_1}$ est cyclique.

On complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale associée.

Soit $\Gamma = \{ f \in E^* \mid \exists P \in K[X] \text{ tq } f = e_k^* \circ P(u) \}$.

Soit $F = \Gamma^\circ = \{ y \in E \mid \forall f \in \Gamma, f(y) = 0 \}$.

F est un K sev de E, stable par u.

Montrons que $E = F_1 \oplus F$, en montrant d'abord que $F_1 \cap F = \{0\}$ puis que $\dim F = \dim E - k$.

· Soit $y \in F_1 \cap F$. Supposons $y \neq 0$. Alors il existe $p \in \{1,..,k\}$ tel que $y = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i$, $a_p \neq 0$.

$0 = e_k^* \circ u^{k-p}(y) = e_k^* \left(\sum_{i=1}^{p} a_i e_{i+k-p} \right) = a_p$: contradiction.

Posons $\varphi : K[u] \to I'$
$P(u) \mapsto e_k^* \circ P(u)$

φ est bien définie, K-linéaire, surjective.

Montrons que φ est injective.

Soit $P \in K[X]$ tel que $e_k^* \circ P(u) = 0$. Supposons $P(u) \neq 0$.

$K[u]$ est de dimension $\deg \pi_u = k$, donc il existe $p \in \{0, .., k-1\}$

$P(u) = \sum_{i=0}^{p} a_i u^i$, $a_p \neq 0$

$$0 = e_k^* \circ P(u)(u^{k-1-p}(x)) = e_k^*\Big(\sum_{i=0}^{p} a_i \underbrace{u^{k-1-p+i}(x)}_{e_{k-p+i}}\Big)$$

$$= a_p$$

Contradiction. Donc $P(u) = 0$: φ est injective.

Donc $\dim I' = k$, $\dim I^0 = \dim F = \dim E - k$.

Soit $n = \dim E$. Montrons la proposition par récurrence sur n.

Si $n = 1$, c'est clair.

Supposons que pour $\dim E \in \{1, ..., n-1\}$, la proposition soit vraie.

$u|_{F_1}$ est cyclique et $P_1 := \mu_{u|F_1} = \mu_u$.

De plus $E = F_1 \oplus F$, F stable par u, $\dim F \leq n-1$.

On applique la propriété de récurrence à $u|_F$:

$F = \bigoplus_{i=2}^{n} F_i$, · F_i stable par $u|_F$ $\forall i \in \{2, ..., n\}$
· $u|_{F_i}$ cyclique
· $P_i := \mu_{u|F_i}$ vérifient $P_n | ... | P_2 = \mu_{u|F}$.

Or $\mu_{u|F} | \mu_u = P_1$ donc on a bien $P_n | ... | P_1 = \mu_u$

et on a montré le théorème.

$\square$

VM
24/12/14
2

Montrons le lemme :

Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$.

Lemme : Soient $x_1, \dots, x_p \in E \setminus \{0\}$.

i) Si $K[u](x_1) \oplus \dots \oplus K[u](x_p)$, alors
$$\mu_{u, x_1 + \dots + x_p} = \text{ppcm}(\mu_{u,x_1}, \dots, \mu_{u,x_p}).$$

ii) Si μ_{u,x_i} sont premiers entre eux deux à deux,
$$K[u](x_1 + \dots + x_p) = K[u](x_1) \oplus \dots \oplus K[u](x_p)$$

dém : montrons-le pour $p = 2$:

i) $P(u)(x_1 + x_2) = P(u)(x_1) + P(u)(x_2) = 0$

Soit $P = \text{ppcm}(\mu_{u,x_1}, \mu_{u,x_2})$. Alors μ_{u,x_1+x_2} divise P.

D'autre part, $\mu_{u,x_1+x_2}(u)(x_1) = -\mu_{u,x_1+x_2}(u)(x_2) \in K[u](x_1) \cap K[u](x_2) = \{0\}$

donc $P / \mu_{u,x_1+x_2}$.

ii) Supposons μ_{u,x_1} et μ_{u,x_2} premiers entre eux.

Soit $y \in K[u](x_1) \cap K[u](x_2)$. Il existe U, V tq
$$U(u)(x_1) = y = V(u)(x_2).$$

$$0 = U(u) \circ \mu_{u,x_1}(u)(x_1) = \mu_{u,x_1}(u)(y) = \mu_{u,x_1}(u) \circ V(u)(x_2)$$
$$= V(u) \circ \mu_{u,x_1}(u)(x_2)$$

Donc $\mu_{u,x_2} \mid V\mu_{u,x_1} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \mu_{u,x_2} \mid V$. Donc $\underbrace{V(u)(x_2)}_{y} = 0$.

Ainsi $K[u](x_1) \oplus K[u](x_2)$ et $\mu_{u,x_1+x_2} = \mu_{u,x_1}\mu_{u,x_2}$

$$\dim K[u](x_1+x_2) = \deg \mu_{u,x_1+x_2} = \deg \mu_{u,x_1} + \deg \mu_{u,x_2}$$
$$= \dim K[u](x_1) + \dim K[u](x_2).$$

De plus, $K[u](x_1) \oplus K[u](x_2) \supset K[u](x_1 + x_2)$, d'où l'égalité.

$\square$

$\cdot$ $\mu_u = \prod P_i^{\alpha_i}$ décomposition en irréductibles.

Montrons qu'il existe $x \in \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$ tel que $\mu_{u,x} = P_i^{\alpha_i}$.

Par le lemme des noyaux,

$$E = \bigoplus \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$. On a $\mu_{u,x} \mid P_i^{\alpha_i}$.

Comme P_i est irréductible, $\mu_{u,x} = P_i^{\beta_x}$.

Supposons que $\forall x \in \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$, $\beta_x \leq \alpha_i - 1$.

Alors $P_i^{\alpha_i - 1}(u)\Big|_{\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)} = 0$ donc $\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i - 1}(u) = \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$.

Donc $E = \bigoplus_{j \neq i} \operatorname{Ker} P_j^{\alpha_j}(u) \oplus \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i - 1}(u)$

donc $P_i^{\alpha_i - 1} \circ \prod P_j^{\alpha_j}$ est annulateur de u, ce qui contredit la minimalité de μ_u.

$\cdot$ $\forall i$, il existe $x_i \in \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$ tel que $\mu_{u,x_i} = P_i^{\alpha_i}$.

$\underset{\mu_{u,x_i}}{\overset{\shortparallel}{P_i^{\alpha_i}}}$ sont premiers entre eux deux à deux,

donc $\underset{E}{\underset{\shortparallel}{K[u](x_1 + \dots + x_n)}} = \bigoplus \underbrace{K[u](x_i)}_{\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)}$

Ainsi $\mu_{u, x_1 + \dots + x_n} = \prod P_i^{\alpha_i} = \mu_u$.