VM
26/04/15
1

$\exp : H_n \to H_n^{++}$ est un homéomorphisme

155, 156, 158, 160 (cas réel)

Réf : MT

Théorème :

Soit $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes.
— $H_n^{++}(\mathbb{C})$ — définies positives.
Alors $\exp : H_n \to H_n^{++}$ est un homéomorphisme.

dém : Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(A)^* = \exp(A^*)$.

Donc $\exp(H_n) \subset H_n$.

De plus, si $A \in H_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P$

d'où $\exp(A) = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P \in H_n^{++}(\mathbb{C})$,

car $P^{-1} = P^*$.

Surjectivité : Soit $B \in H_n^{++}(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P$.

Si $A = P^{-1}\begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln \lambda_n \end{pmatrix} P$, alors $\exp(A) = B$.

Injectivité : Soient $A_1, A_2 \in H_n(\mathbb{C})$ tels que $\exp(A_1) = \exp(A_2)$.

Il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ et $\mu_1, \dots, \mu_r$ réels tous distincts tels que $A_2 = P^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_r I_{n_r} \end{pmatrix} P$, $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

$\exp(A_2) = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{\mu_1} I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\mu_r} I_{n_r} \end{pmatrix} P$.

Les e^{μ_i} sont tous distincts, donc il existe, par exemple par interpolation de Lagrange, $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall i, R(e^{\mu_i}) = \mu_i$.

Donc $R(\exp(A_2)) = A_2$.

Or A_1 commute avec $\exp(A_1) = \exp(A_2)$, donc avec $R(\exp(A_2)) = A_2$.

On peut donc codiagonaliser A_1 et A_2 : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$

tel que
$$A_1 = Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q$$
$$A_2 = Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix} Q$$

$\lambda_i, \lambda_i' \in \mathbb{R}$ car ce sont les valeurs propres de A_1 et A_2.

Alors
$$\exp(A_1) = \exp(A_2) \Rightarrow \forall i,\ e^{\lambda_i} = e^{\lambda_i'}$$
$$\Rightarrow \forall i,\ \lambda_i = \lambda_i'$$

donc $A_1 = A_2$.

- $\exp$ est continue.
- L'inverse de $\exp$ est aussi continue :

soit (A_p) une suite de $H_n^{++}(\mathbb{C})$ convergeant vers $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$.

Soient B_p, $B \in H_n(\mathbb{C})$ tels que $\exp(B_p) = A_p$; $\exp(B) = A$.

On veut montrer que $B_p \to B$.

Si B' est une valeur d'adhérence de (B_p), par continuité de $\exp$, $\exp(B') = A$. Or $B' \in H_n(\mathbb{C})$ car $H_n(\mathbb{C})$ est fermé, donc par injectivité de $\exp$, $B' = B$.

Ainsi, (B_p) a au plus une valeur d'adhérence. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est bornée.

Soit $\|x\| = \sqrt{x^* x}$ la norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$.

Pour $M \in H_n(\mathbb{C})$, on pose
$$\rho(M) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \text{ vp}\}$$
$$\rho^+(M) = \max\{\lambda,\ \lambda \text{ vp}\}$$
$$\rho^-(M) = \min\{\lambda,\ \lambda \text{ vp}\}.$$

Lemme : $\forall M \in H_n(\mathbb{C}),\ \rho(M) = |||M|||$.

(A_p) converge vers A donc $(|||A_p|||)$ est bornée :

$\rho(A_p)$ est donc majoré.

Or $\forall p$, $A_p \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ donc $\rho(A_p) = \rho^+(A_p)$

$\exists M > 1$ tel que $\forall p,\ \rho^+(A_p) \leq M$.

VM
26/04/15
2

Or A_p^{-1} converge vers A^{-1} donc $\rho(A_p^{-1})$ est aussi majoré

$\exists N > 1$ tq $\forall p$, $\rho(A_p^{-1}) = \rho^+(A_p^{-1}) = \dfrac{1}{\rho^-(A_p)} \leq N$.

Donc $\forall p$, $\dfrac{1}{N} \leq \rho^-(A_p) \leq \rho^+(A_p) \leq M$.

Alors $\underset{|||B_p|||}{\overset{\shortparallel}{\rho(B_p)}} \leq \max(|\ln N|, \ln M)$

Ainsi (B_p) est bornée, d'où le résultat.

---

dém (lemme) : on a facilement : $\forall M \in H_n(\mathbb{C})$, $\rho(M) \leq |||M|||$.

Réciproquement, il existe une base hermitienne (e_i) de vecteurs propres de M, associés à μ_i :

$x \in \mathbb{C}^n$, $\quad Mx = M\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i \mu_i e_i$.

$\|Mx\|^2 = \sum_i |x_i \mu_i|^2 \leq \rho(M)^2 \sum_i |x_i|^2 \leq \rho(M)^2 \|x\|^2$.

donc $|||M||| \leq \rho(M)$.