VM

31/12/14

124, 152

Déterminant et séries formelles

Théorème : Soit K un corps algébriquement clos (afin d'assurer $K(X)_0 \subset K[[X]]$) et $K(X)_0 = \{f \in K(X) \mid 0 \text{ n'est pas pôle de } f\}$.

Soit $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in K[[X]] \setminus K[X]$.

Ne pas écrire l'énoncé

Sont équivalents :

(i) $S \in K(X)_0$.

(ii) $\exists N \geq 1$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in K$, $\lambda_N \neq 0$ tels que il existe $m \geq N$ pour tout $n \geq m$, $a_n - \lambda_1 a_{n-1} - \dots - \lambda_N a_{n-N} = 0$.

(iii) Il existe m tel que pour tout $n \geq m$, $\det A_n = 0$,

où $A_n = \left(a_{i+j}\right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \in M_{n+1}(K)$.

dém : $(i) \Rightarrow (ii)$: $S \in K(X)_0$: alors il existe $U \in K[X]$ et $V \in K[X] \setminus \{0\}$

tels que $U \wedge V = 1$, $V(X) = 1 - \lambda_1 X - \dots - \lambda_N X^N$,

et $VS = U$

avec $\lambda_N \neq 0$. En effet, si $\deg V = 0$, alors $S \in K[X]$, ce qui est exclu, et $V(0) \neq 0$ sinon 0 est pôle, donc quitte à factoriser par $V(0)$, on peut supposer $V(0) = 1$.

Formellement, $VS = (1 - \lambda_1 X - \dots - \lambda_N X^N) \sum_{k \geq 0} a_k X^k = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$

Pour $n \geq N$, $b_n = a_n - \lambda_1 a_{n-1} - \dots - \lambda_N a_{n-N}$.

Pour $n \geq \deg U + 1$, $b_n = 0$ car $VS = U$, donc en posant $m = \max(N, \deg U + 1)$,

$\forall n \geq m$, $a_n - \lambda_1 a_{n-1} - \dots - \lambda_N a_{n-N} = 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: En posant $V = 1 - \lambda_1 X - \dots - \lambda_N X^N$, on a d'après (ii)

$$VS = \sum_{n=0}^{m-1} b_n X^n \in K[X].$$

Donc $S \in K(X)_0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Soit $n \geq m$. On note $C_0, C_1, \dots, C_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}$ les colonnes de A_n.

D'après (ii), $C_n = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_{n-i}$ donc $\det A_n = 0$.

$\underline{(iii) \Rightarrow (ii)}$: Montrons tout d'abord que la suite $(\det A_n)_{n \geq 0}$ n'est pas identiquement nulle. En effet, soit $q = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$.

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_q \\ \vdots & & \iddots & \vdots \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ a_q & \cdots & \cdots & a_{2q} \end{pmatrix} \quad \text{donc } \det A_q = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} a_q^{\,q+1} \neq 0$$

Soit p l'unique entier tel que $\det A_p \neq 0$ et $\forall n > p$, $\det A_n = 0$.

Soit $m = p+1$. $A_m = \left(\begin{array}{c|c} A_p & \begin{matrix} a_m \\ \vdots \\ a_{2m-1} \end{matrix} \\ \hline a_m \cdots a_{2m-1} & a_{2m} \end{array}\right)$

Les m premières colonnes de A_m sont libres car $\det A_p \neq 0$, ainsi, comme $\det A_m = 0$, il existe $N \geq 1$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_N \neq 0$ et $\forall n \in [\![m, 2m]\!]$, $a_n - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_{n-i} = 0$.

Pour tout $n \geq m$, on note $\alpha_n = a_n - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_{n-i}$.

Montrons que $\forall n \geq m$, $\alpha_n = 0$. C'est vrai pour $n \in [\![m, 2m]\!]$.

Soit $k \geq 1$ tel que $\alpha_n = 0$ $\forall n \in [\![m, 2m+k-1]\!]$.

$$0 = \det A_{m+k} = \left|\begin{array}{c|ccc} A_p & a_m & \cdots & a_{m+k} \\ & a_{2m-1} & & a_{2m+k-1} \\ \hline & a_{2m} & & a_{2m+k} \\ * & & & \\ & & & a_{2m+2k} \end{array}\right| \begin{matrix} \\ \\ \Big\updownarrow k+1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_0 & C_{m-1} & C_m & C_{m+k} \end{matrix}$$

On fait $C_{m+k} \leftarrow C_{m+k} - \lambda_1 C_{m+k-1} - \dots - \lambda_N C_{m+k-N}$

$\vdots$

$C_m \leftarrow C_m - \lambda_1 C_{m-1} - \dots - \lambda_N C_{m-N}$

$$0 = \det A_{m+k} = \left|\begin{array}{c|c} A_p & 0 \\ \hline * & \begin{matrix} 0 & & \alpha_{2m+k} \\ & \iddots & * \\ \alpha_{2m+k} & & \end{matrix} \end{array}\right| = \underbrace{\det A_p}_{\neq 0} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \alpha_{2m+k}^{\,k+1}$$

donc $\alpha_{2m+k} = 0$.

Par récurrence, on a donc $\alpha_n = 0$ $\forall n \geq m$.