54. Théorème de Fejér

[QZ13, §IV.III.3, p84–85]

ÉNONCÉ

Théorème. [Théorème de Fejér]

- *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $N \geq 1$ et $\sigma_N(f) = f * K_N \xrightarrow[N\to+\infty]{u} f$.*
- *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour un $p \in [1,+\infty[$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $N \geq 1$ et $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.*

DÉVELOPPEMENT

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On a $\|\sigma_N f\|_\infty = \|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|K_N\|_1 = \|f\|_\infty$, puisque :

$$\|K_N\|_1 \underset{K_N\geq 0}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_0^{2\pi} D_n(t)dt = 1$$

Introduisons le module de continuité de f : c'est l'application $\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\omega(\eta) = \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in \mathbb{R} \text{ et } |v-u| \leq \eta\}$$

Cette application est bien définie par uniforme continuité de f.

Soit $\delta > 0$. Pour $x \in \mathbb{T}$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \left|f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_N(t)dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-f(x-t))K_N(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|\,K_N(t)dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|\leq\delta}|f(x)-f(x-t)|\,K_N(t)dt + \int_{\delta<|t|\leq\pi}|f(x)-f(x-t)|\,K_N(t)dt\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\omega(\delta)\int_{|t|\leq\delta}K_N(t)dt + 2\|f\|_\infty\int_{\delta<|t|\leq\pi}K_N(t)dt\right) \\
&\leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin^2(\delta/2)} \qquad \text{puisque } \sup_{|t|\in[\delta,\pi]} K_N(t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\delta/2)}
\end{aligned}$$

Finalement $\|f - \sigma_N(f)\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin^2(\delta/2)}$.

Ce raisonnement étant valable pour tout $\delta > 0$, on obtient en passant à la limite supérieure :

$$\limsup_{N\to+\infty}\|f - \sigma_N(f)\|_\infty \leq \inf_{\mathbb{R}_+^*}\omega$$

On conclut que $\|f - \sigma_N(f)\|_\infty \longrightarrow_{N\to+\infty} 0$ puisque $\omega(0) = 0$ et que ω est continue en 0.
En effet, par uniforme continuité de f, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\omega(\eta) < \varepsilon$ et donc $\omega \leq \varepsilon$ sur $]0,\eta]$ d'où[1] $\omega(0^+) \leq \varepsilon$.

Soit désormais $f \in L^p(\mathbb{T})$.
On a pour $x \in \mathbb{T}$ par l'inégalité de Jensen appliquée à la mesure de probabilité $t \longmapsto K_N(t)\frac{dt}{2\pi}$:

$$|\sigma_N(f)(x)|^p = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_N(t)dt\right|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-t)|^p\,K_N(t)dt$$

Et donc par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\|\sigma_N(f)\|_p^p \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}K_N(t)\Big(\int_0^{2\pi}|f(x-t)|^p\,dx\Big)dt = \|f\|_p^p\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_N(t)dt = \|f\|_p^p$$

On procède de même en posant $g : t \longmapsto \|f - \tau_t f\|_p^p$:

$$\|f - \sigma_N(f)\|_p^p \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}K_N(t)\Big(\int_0^{2\pi}|f(x)-f(x-t)|^p\,dx\Big)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_N(t)g(t)dt = \sigma_N(g)(0)$$

puisque K_N est pair.

En admettant que g est continue, le premier résultat donne $\|\sigma_N(f) - f\|_p \longrightarrow_{N\to+\infty} 0$.

COMMENTAIRES

Pour montrer que g est continue :

- il suffit de le montrer en $t = 0$.
- on montre par convergence dominée la continuité en 0 pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$,
- on utilise la densité de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans L^p pour conclure.

Plus généralement, le résultat est vrai sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ et on passe alors par des fonctions $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.

1. $\omega(0^+)$ est bien définie puisque ω est croissante