VM
2/05/15
1

Théorème fondamental des courbes

Réf : Do Carmo

221, (220)

Théorème :

Soit I un intervalle ouvert contenant 0.

Soit $c : I \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $d : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$.

Soient $a \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$, $v \perp w$.

Alors il existe une unique courbe γ $\mathcal{C}^3 : I \to \mathbb{R}^3$ birégulière paramétrée par longueur d'arc, telle que sa courbure est c, sa torsion est d, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$ et $\nu(0) = \dfrac{\gamma''(0)}{\|\gamma''(0)\|} = w$.

dém : Le repère de Serret-Frenet (τ, ν, β) d'une telle courbe doit vérifier :

$$\begin{pmatrix} \tau'(s) \\ \nu'(s) \\ \beta'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c(s) & 0 \\ -c(s) & 0 & -d(s) \\ 0 & d(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(s) \\ \nu(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \tau(0) \\ \nu(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ v \wedge w \end{pmatrix}$$

Soit (SF) ce problème de Cauchy, associé à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en dimension 9 à coefficients continus. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution (τ, ν, β) et celle-ci est définie sur I.

- Montrons que $\forall s \in I$, $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ est une base orthonormée directe.

Posons $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$

$$= (\langle \tau, \nu \rangle, \langle \tau, \beta \rangle, \langle \nu, \beta \rangle, \langle \tau, \tau \rangle, \langle \nu, \nu \rangle, \langle \beta, \beta \rangle).$$

Comme $(v, w, v \wedge w)$ est une base orthonormée,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)(0) = (0, 0, 0, 1, 1, 1).$$

· Les α_i sont dérivables et satisfont (E) :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \\ \alpha_5' \\ \alpha_6' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d & 0 & -c & c & 0 \\ d & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 & d & -d \\ 2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2c & 0 & -2d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1(s) = \langle \tau, \nu \rangle (s)$

$\alpha_1'(s) = \langle \tau', \nu \rangle + \langle \tau, \nu' \rangle = c \langle \nu, \nu \rangle - c\langle \tau, \tau \rangle - d \langle \tau, \beta \rangle$.

Or $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)(s) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$ vérifie le problème de Cauchy : d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il y a unicité de la solution.
Ceci prouve que $(\tau, \nu, \beta)(s)$ est une base orthonormée $\forall s \in I$.

De plus, $\varphi : s \mapsto \det(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ est continue, > 0 en $s = 0$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Ainsi, pour tout $s \in I$, $\varphi(s) > 0$, donc la base orthonormée est directe.

· Construisons γ. Tout d'abord, τ, ν et β sont de classe $\mathcal{C}^1$.
Comme $\forall s \in I$, $\tau'(s) = c(s)\nu(s)$, et que c est de classe $\mathcal{C}^1$, τ est de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit $\gamma : s \mapsto a + \int_0^s \tau(u)\,du$.
Ainsi, γ est de classe $\mathcal{C}^3$. $\|\gamma'(s)\| = \|\tau(s)\| = 1$ donc γ est paramétrée par longueur d'arc.
$\gamma''(s) = \tau'(s) = c(s)\nu(s)$ donc $\nu(s) = \dfrac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$ (comme $\|\gamma''(s)\| \overset{= c(s)}{\neq} 0$ pour tout s, γ est birégulière). Ainsi, (τ, ν, β) est le repère Serret-Frénet associé à γ et c et d sont bien les courbures et torsions de γ.

VM
2/05/15
2

On a bien $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$, $\dfrac{\gamma''(0)}{\|\gamma''(0)\|} = w$.

· Unicité : Soit $\bar{\gamma}$ une courbe vérifiant les mêmes conditions.

Soit $(\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta})$ le repère de Serret - Frénet associé.

Alors il vérifie (SF), donc $(\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}) = (\tau, \nu, \beta)$.

$$\bar{\gamma}(s) = a + \int_0^s \bar{\tau}(u)\,du = \gamma(s) \quad \forall s \in I.$$

$\square$