

## 14. Lemme de MORSE

[Rou99, §5.5, p327]

### ÉNONCÉ

#### THÉORÈME. [LEMME DE MORSE]

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0. On suppose que  $df(0) = 0$  et  $d^2f(0)$  est non dégénérée, de signature  $(p, n - p)$ .

Alors il existe un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\varphi$  entre deux voisinages de l'origine de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi(0) = 0$  et  $f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$  au voisinage de 0.

### DÉVELOPPEMENT

$f$  est  $\mathcal{C}^3$  donc la formule de TAYLOR avec reste intégral donne pour  $x \in U$  :

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t) d^2f(tx)(x, x) dt = x^\top \int_0^1 (1-t) d^2f(tx) dt x = x^\top Q(x)x$$

$Q$  est  $\mathcal{C}^1$  (par dérivation sous le signe intégral) et  $Q(0) = \frac{1}{2}D^2f(0)$  est symétrique inversible de signature  $(p, n - p)$ .

**LEMME.** Soit  $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $V \in \mathcal{V}(A_0) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}))$  telle que  $\forall A \in V, A = g(A)^\top A_0 g(A)$ .

Soit en effet  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^\top A_0 M$ . On a que  $\varphi$  est différentiable et

$$d\varphi(M)(H) = H^\top A_0 M + M^\top A_0 H$$

En particulier  $d\varphi(I_n)(H) = H^\top A_0 + A_0 H = (A_0 H)^\top + A_0 H$ . On a donc  $\ker(d\varphi(I_n)) = A_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  où  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices antisymétriques, et de plus  $d\varphi(I_n)$  est surjective dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  puisque pour tout  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), d\varphi(I_n)(\frac{1}{2}A_0^{-1}A) = A$ .

Posons  $F = A_0^{-1} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $F \oplus \ker(d\varphi(I_n)) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$  et  $I_n \in F$ .

Si  $\psi = \varphi|_F$ , on a que  $d\psi(I_n)$  est bijective donc le théorème d'inversion locale donne que  $\psi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local d'un voisinage  $W$  de  $I_n$  dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  sur un voisinage  $V$  de  $A_0 = \psi(I_n)$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Pour  $A \in V$ , il existe donc une unique matrice inversible  $M \in W$  telle que  $A = M^\top A_0 M$ . On a que  $M = \psi^{-1}(A)$ , et donc  $g = \psi^{-1}$  convient.

1. quitte à restreindre,  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  étant ouvert

Revenons au lemme de MORSE, et appliquons le résultat du lemme à  $Q(0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Si  $M(x) = g(Q(x))$ , on a  $Q(x) = (M(x))^\top Q(0)M(x)$  au voisinage de 0, et donc  $f(x) - f(0) = y^\top Q(0)y$  où  $y = M(x)x$ .

Comme  $Q(0) = \frac{1}{2}D^2f(0)$  est de signature  $(p, n - p)$ , par classification des formes quadratiques il existe une matrice  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^\top Q(0)A = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  et le changement linéaire de coordonnées  $y = Au$  donne alors :

$$y^\top Q(0)y = u^\top A^\top Q(0)Au = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

Posons donc  $\varphi : x \mapsto A^{-1}M(x)x$ .  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  et on a :

$$d\varphi(0)(h) = A^{-1}(dM(0)(h) \times 0 + M(0) \times h) = A^{-1}M(0)(h)$$

Donc  $d\varphi(0) = A^{-1}M(0)$  est inversible.

Par le théorème d'inversion locale, on a que  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local entre deux voisinages de 0 car  $\varphi(0) = 0$ , ce qui conclut puisqu'alors dans ce voisinage de 0 :

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$$

### COMMENTAIRES

Et sans l'hypothèse que  $f$  est  $\mathcal{C}^3$ ? On n'a plus l'assurance que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$ ! En effet  $f \in \mathcal{C}^3$  donne  $M \in \mathcal{C}^1$  et on calcule :

$$d\varphi(x)(h) = A^{-1}(dM(x)(h) \times 0 + M(x) \times h)$$

Donc  $x \mapsto d\varphi(x)$  est  $\mathcal{C}^1$  dès que  $M$  est  $\mathcal{C}^1$ .