VM
11/06/15
1

Groupe circulaire

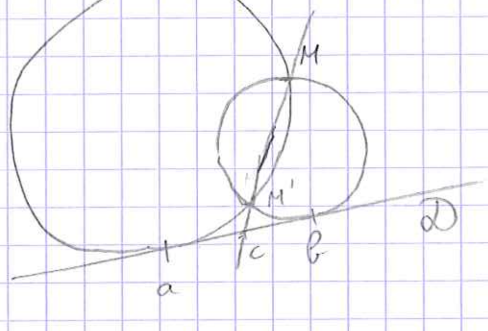
127, 182

Version S. Le Fourn

Définition : Les éléments a, b, c, d de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont en division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$.

Proposition : $[a, b, c, \infty] = -1$ ssi c est le milieu de $[a b]$.

Lemme :

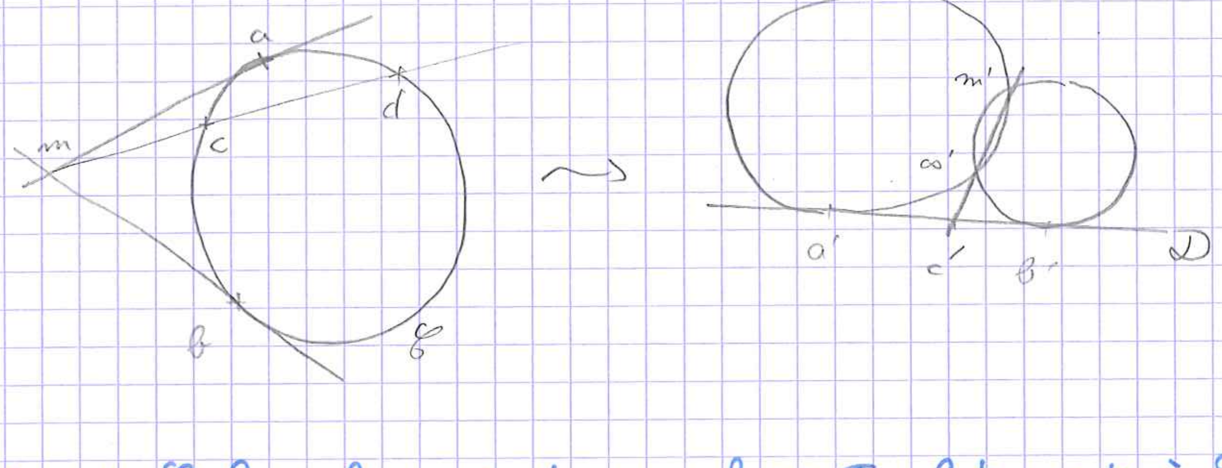


Soient $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$ deux cercles tangents à la droite $\mathcal{D}$ respectivement en a et b. S'ils ont deux points d'intersection M et M', alors la droite (MM') coupe $\mathcal{D}$ en c milieu de $[a, b]$.

S'ils sont tangents en un point I, alors la droite passant par I et tangente aux deux cercles coupe $\mathcal{D}$ en c.

Proposition : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Le point d tel que $[a, b, c, d] = -1$ peut être construit uniquement par des droites et des cercles définis à partir de a, b et c.

dém : 1^{er} cas : a, b et c ne sont pas alignés dans $\mathbb{R}^2$.



On note $\mathcal{C}$ le cercle passant par a, b, c ; T_a la tangente à $\mathcal{C}$ en a,

T_b ——— en b.

Si T_a et T_b ne sont pas parallèles, soit $m = (T_a) \cap (T_b)$.

Soit $d = (\mathcal{C} \cap (mc)) \setminus \{c\}$.

Montrons que $[a, b, c, d] = -1$.

Soit h une homographie telle que $\varphi(d) = \infty$.

On note a', b', c', m', ∞' les images de a, b, c, m, ∞ par φ.

h envoie $\mathcal{C}$ sur une droite $\mathcal{D}$ car $d \in \mathcal{C}$

T_a sur un cercle $C_{a'}$ car $d \notin T_a, T_b$.

T_b ——— $C_{b'}$.

Les cercles $C_{a'}$ et $C_{b'}$ sont tangents à $\mathcal{D}$ en a' et b', et se coupent en m' et ∞'.

Comme $c \in \mathcal{C}$ et à la droite-cercle (m, d, ∞),

$c' \in \mathcal{D}$ et à la droite $(m'\infty')$ donc c' est, d'après le lemme, le milieu de $[a' b']$.

(je précise qu'ici, c' n'est pas à comprendre comme ceci

Donc $[a', b', c', \infty] = -1$

$\quad\parallel$

$[a, b, c, d]$

Dans le cas où T_a et T_b sont parallèles, on fait de même en utilisant la deuxième partie du lemme.

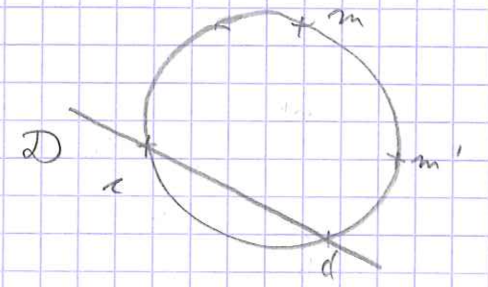
2ème cas : a, b, c sont alignés dans $\mathbb{R}^2$.

On note $\mathcal{D}$ la droite réelle passant par a, b, c.

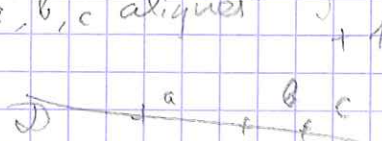
Soient $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ deux cercles tangents à $\mathcal{D}$ en a et b, ayant 2 points d'intersection m et m'.

Si c est le milieu de $[a, b]$, alors c est sur la droite $(m m')$ et d l'autre point d'intersection de (mm') avec $\mathcal{D}$ convient $(d = \infty)$.

Sinon, c, m et m' ne sont pas alignés. Soit d l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ passant par c, m et m' avec $\mathcal{D}$. Ce point réalise la division harmonique en envoyant m' à l'infini, ce qui nous ramène au 1er cas.



ou a, b, c alignés



Soit $p \notin \mathcal{D}$, envoyer p à l'infini et se ramener au cas 1.

VM
11/06/15

Théorème : Toute bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ préservant les cercles-droites appartient au groupe circulaire.

dém :

. Etape 1 : Soit $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une telle bijection. Quitte à la composer par une homographie, on peut supposer que φ fixe 0, 1 et ∞.

Comme $\varphi(\infty) = \infty$, φ préserve les cercles, les droites et la tangence. Donc d'après la proposition, φ préserve la division harmonique.

. Etape 2 : a, b, c, ∞ sont en division harmonique ssi $c = \frac{a+b}{2}$, donc φ préserve les milieux.

Ainsi, $\forall a \in \mathbb{C}$, $\varphi\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(a)$ (φ fixe 0)

et $\varphi(a+b) = 2\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2\,\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} = \varphi(a)+\varphi(b)$.

De plus, $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$,

$$[a, -a, a^2, 1] = \frac{1+a}{1-a}\,\frac{a^2-a}{a^2+a} = -1$$

donc $[\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a^2), 1] = -1$ (car φ fixe 0 et 1)

Or comme $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(a) \notin \{0, 1, -1\}$

donc $[\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a)^2, 1] = -1$

et $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$.

En appliquant cela à $a+b$, on a $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ $\forall a, b \in \mathbb{C}$.

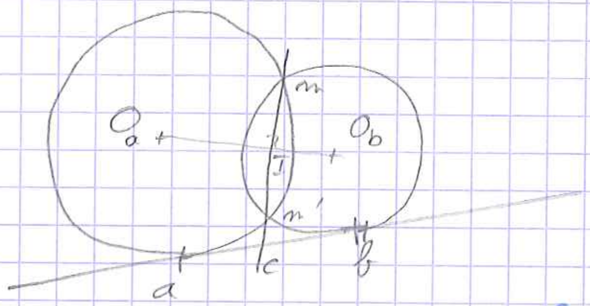
Ainsi, $\varphi|_{\mathbb{C}}$ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$, tel que $\varphi|_{\mathbb{R}} = id$.

Ainsi, $\varphi = id$ ou $\varphi : z \mapsto \overline{z}$.

φ appartient au groupe circulaire.

□

Remarque : · démonstration du lemme



$(O_a O_b)$ et $(m m')$ sont deux droites orthogonales.

Pour le voir, on remarque que la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(O_a O_b)$ préserve les deux cercles et donc la droite $(m m')$.

Par Pythagore :

$$ac^2 = O_a c^2 - r_a^2 \quad \text{où } r_a \text{ rayon de } \mathcal{C}_a.$$

$$cb^2 = O_b c^2 - r_b^2$$

Soit $f : M \mapsto O_a M^2 - r_a^2 - O_b M^2 + r_b^2$

$f(m) = f(m') = 0.$

Pour tout M sur $(m m')$, $O_a M^2 = O_a I^2 + I M^2$ où $I = (m m') \cap (O_a O_b)$.

$O_b M^2 = O_b I^2 + I M^2$

donc $f(M) = f(I) = cste = 0$

Ainsi $f(c) = 0$ et $ac = cb$.

· dém de la proposition précédent le lemme :

$[a, b, c, \infty] = -1$ ssi c milieu de $[a, b]$.

$$[a, b, c, \infty] = \frac{c-a}{c-b}$$

donc $\frac{c-a}{c-b} = -1$ ssi $c = \frac{a+b}{2}$.