

HOMÉOMORPHISME DE L'EXPONENTIELLE

[CG13a, §VI.2.5, p357-358]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

DÉVELOPPEMENT

On procède en plusieurs étapes.

1. Vérifions que cette application est bien définie, i.e., à valeurs dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Soit en effet $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. S est diagonalisable dans une base orthonormée : on peut écrire

$$A = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1},$$

où $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les valeurs propres (réelles) de A . Il vient alors

$$\exp(A) = P \cdot \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot P^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

2. Montrons maintenant que l'application est surjective.

Choisissons pour cela $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et écrivons

$$B = \tilde{P} \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot \tilde{P}^{-1},$$

où $\tilde{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et les $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ sont les valeurs propres de B . En posant

$$A = \tilde{P} \cdot \text{diag}(\ln(\mu_1), \dots, \ln(\mu_n)) \cdot \tilde{P}^{-1},$$

il est clair que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\exp(A) = B$.

3. Passons à l'injectivité.

Prenons $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(A) = \exp(A')$ et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . Choisissons aussi $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$.

Par interpolation de LAGRANGE, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i.$$

A' commute alors avec

$$\begin{aligned} Q(\exp(A')) &= Q(\exp(A)) = Q\left(P \cdot \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot P^{-1}\right) \\ &= P \cdot Q\left(\text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\right) \cdot P^{-1} = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1} = A. \end{aligned}$$

Ainsi A et A' sont diagonalisables et commutent, donc sont co-diagonalisables.

Écrivons $A = R \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot R^{-1}$ et $A' = R \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot R^{-1}$. Alors

$$\text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) = R^{-1} \cdot \exp(A') \cdot R = R^{-1} \cdot \exp(A) \cdot R = \text{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}),$$

et donc nécessairement $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, puis $A = A'$. D'où l'injectivité.

1. quitte à réindicer les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$

4. Montrons que l'application et sa réciproque sont continues.

Comme \exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il en est de même de sa restriction à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que la réciproque est continue.

Choisissons donc une suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et définissons $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $B_p = \exp(A_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $B = \exp(A)$. On veut montrer que $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$.

Notons que $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_2$ et remarquons que $(B_p^{-1})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers B^{-1} , donc est également bornée pour $\|\cdot\|_2$. Or, pour $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a

$$\|M\|_2 = \max(\text{Sp}(M)).$$

En effet, si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, M est diagonalisable en base orthonormée donc

$$\|M\|_2 = \|\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_2,$$

où les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les valeurs propres réelles positives de M . On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|Mx\|_2 \leq \max(\text{Sp}(M)) \cdot \|x\|_2,$$

avec égalité pour $x = (\delta_{i_{\max}})_{1 \leq i \leq n}$ où $i_{\max} \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est tel que $\lambda_{i_{\max}} = \max(\text{Sp}(M))$, ce qui assure que $\|M\|_2 = \max(\text{Sp}(M))$.

Ainsi on peut majorer les spectres des $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et de B par une constante C , puis ceux des $(B_p^{-1})_{p \in \mathbb{N}}$ et de B^{-1} par une constante $1/C'$.

Les valeurs propres des $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont donc incluses dans $[C', C]$ compact de \mathbb{R}_+ , puis celles de $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans $[\ln(C'), \ln(C)]$ compact de \mathbb{R} .

La suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc bornée pour $\|\cdot\|_2$, donc admet une valeur d'adhérence, qui ne peut être que A . En effet, si $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge (quitte à extraire) vers \tilde{A} , alors $B_p = \exp(A_p)$ converge vers $B = \exp(\tilde{A})$ par continuité de l'exponentielle, et donc $A = \tilde{A}$ par injectivité. La suite n'ayant qu'une valeur d'adhérence A , elle converge vers A .

Ce qui conclut quant à la continuité de l'application réciproque.