VM
13/04/15

Conique passant par 5 points 180, 181

Réf : Eiden

Théorème :

Soient 5 points distincts d'un plan affine réel, dont aucune partie de 4 points n'est alignée. Alors il existe une unique conique passant par ces 5 points. De plus, cette conique est non dégénérée si et seulement si aucune partie à 3 éléments n'est alignée.

dém : Soient A, B, C, D, E cinq points distincts, tels que 4 d'entre eux ne sont jamais alignés. Il existe trois points non alignés, par exemple A, B et C.

Ainsi (A, B, C) est une base du plan affine.

Soient (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques dans la base (A, B, C). Alors toute conique passant par A, B et C a une équation de la forme $pXY + qXZ + rYZ = 0$, $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$.

En notant (x_D, y_D, z_D) et (x_E, y_E, z_E) les coordonnées barycentriques de D et E, une conique passant par les 5 points vérifie le système :

$$\begin{cases} p\, x_D y_D + q\, x_D z_D + r\, y_D z_D = 0 \\ p\, x_E y_E + q\, x_E z_E + r\, y_E z_E = 0. \end{cases}$$

On obtient un système linéaire vérifié par (p, q, r). Ce système est de rang au plus 2. En réalité, on montre qu'il est de rang exactement 2.

En effet, supposons qu'il est de rang ≤ 1.

Alors
$$\alpha := x_D x_E (y_D z_E - y_E z_D)$$
$$\beta := y_D y_E (x_D z_E - x_E z_D)$$
$$\gamma := z_D z_E (x_D y_E - x_E y_D)$$
vérifient $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Si $y_D z_E - y_E z_D = 0$, alors $\begin{vmatrix} 1 & x_D & x_E \\ 0 & y_D & y_E \\ 0 & z_D & z_E \end{vmatrix} = 0$,

donc les points A, D et E sont alignés.

Comme A, B, D et E ne sont pas alignés, $D \notin (AB)$ et $E \notin (AB)$

donc $z_D \neq 0$ et $z_E \neq 0$.

Donc $\gamma = 0$ implique que $x_D y_E - x_E y_D = 0$, d'où

C, D et E alignés : donc A, C, D et E sont alignés, ce qui est exclu.

Ainsi, $y_D z_E - y_E z_D \neq 0$. Donc comme $\alpha = 0$, $x_D x_E = 0$, d'où D ou E appartient à la droite (BC). Supposons que ce soit D. Ainsi $\beta = -y_D y_E x_E z_D = 0$

$$\gamma = -z_D z_E x_E y_D = 0$$

Or $D \neq B, C$, donc $y_D \neq 0$, $z_D \neq 0$. De plus, $E \notin (BC)$, sinon B, C, D et E seraient alignés. Donc $x_E \neq 0$.

Ainsi $y_E = z_E = 0$ et $E = A$: exclu.

Donc le système est bien de rang 2. Ainsi, les solutions forment une droite vectorielle. Or elles définissent la même conique, car les équations sont toutes proportionnelles.

Ainsi, une et une seule conique convient.

Supposons la conique dégénérée. Alors le déterminant de la forme quadratique associée est nul :

$$2pXY + 2qXZ + 2rYZ = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & r \\ q & r & 0 \end{vmatrix} = -p(-qr) + qpr = 2pqr.$$

$pqr = 0$, donc on a par exemple $p = 0$, et l'équation de la conique devient $Z(qX + rY) = 0$; c'est l'équation de la réunion des deux droites $Z = 0$ (i.e (AB)) et $qX + rY = 0$. Ainsi, dans tout quintuplet de points, on trouve un triplet de points alignés.

Réciproquement, si 3 des points sont alignés, on recouvre par 2 droites (unicité) la conique est dégénérée.