FACTORISATIONS LU ET DE CHOLESKY

[AK02, §6.2/3, p113–124]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [FACTORISATION LU]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls. Alors il existe un unique couple (L,U) de matrices tel que L est triangulaire inférieure avec diagonale de 1, U est triangulaire supérieure et $A = LU$.

THÉORÈME. [FACTORISATION DE CHOLESKY]
Soit A une matrice symétrique réelle définie positive. Alors il existe une unique matrice B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et $A = BB^*$.

DÉVELOPPEMENT

Commençons par démontrer la factorisation LU. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisante.

- Existence. On effectue l'algorithme du pivot de GAUSS sur A en vérifiant qu'aucune matrice de permutation n'est nécessaire, *i.e.*, que les pivots sont tous non nuls. Pour cela, on crée par récurrence une suite $(A^k)_{1\leq k\leq n}$ de matrices en posant $A^1 = A$ puis $A^{k+1} = E^k A^k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, tant que $a^k_{k,k} \neq 0$, avec :

$$E^k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -\ell_{k+1,k} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & -\ell_{n,k} & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } \ell_{i,k} = \frac{a^k_{i,k}}{a^k_{k,k}} \text{ pour } i \in [\![1,n]\!].$$

  Supposons tous les $(a^k_{k,k})_{1\leq k\leq n}$ non nuls [1]. Alors la suite $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est bien définie, et

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad A^k = \begin{pmatrix} a^1_{1,1} & \star & & \cdots & & \star \\ & \ddots & & & & \\ & & a^k_{k,k} & \ddots & & \vdots \\ & & \star & \star & & \\ & & \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ & & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}.$$

  On peut alors poser $U = A^n$, $L = (E^1)^{-1} \cdots (E^{n-1})^{-1}$ et vérifier, en obtenant

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

  que l'on a bien $A = LU$, $U \in \mathcal{TS}_n(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{TI}^1_n(\mathbb{K})$.

  Reste à voir que les pivots $(a^k_{k,k})_{1\leq k\leq n}$ sont tous non nuls. Procédons par récurrence forte :
  - $a^1_{1,1} = \Delta^1 \neq 0$ car le premier mineur principal est non nul.
  - Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. Supposons les $k-1$ premiers pivots non nuls.
    Cette hypothèse assure que la formule $A^k = E^{k-1} \cdots E^1 A$ est valable. En considérant des produits par blocs on voit que Δ^k la matrice extraite des k premières lignes et colonnes de A se factorise en $\Delta^k = L^k_{1,1} U^k_{1,1}$ où $L^k_{1,1} \in \mathcal{TI}^1_k(\mathbb{K})$ et $U^k_{1,1} \in \mathcal{TS}_k(\mathbb{K})$. Δ^k et $L^k_{1,1}$ étant inversibles, $U^k_{1,1}$ l'est aussi et donc $a^k_{k,k} \neq 0$ puisque c'est le dernier coefficient diagonal de $U^k_{1,1}$.

- Unicité. Soient $(L_1, U_1), (L_2, U_2)$ deux couples convenants.
  On a $L_2 \in \mathcal{TI}^1_n(\mathbb{K})$ et donc $L_2^{-1} \in \mathcal{TI}^1_n(\mathbb{K})$. Comme A est inversible, on en déduit que $U_1 \in \mathcal{TS}_n(\mathbb{K})$ est inversible, d'où

$$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} \in \mathcal{TI}^1_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{TS}_n(\mathbb{K}) = \{I_n\}.$$

  Ainsi $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$, d'où l'unicité.

Passons à la factorisation de CHOLESKY. Soit A satisfaisante.

- Existence. A est définie positive donc vérifie les hypothèses de factorisation LU : écrivons $A = LU$ et posons $D = \operatorname{diag}\left(\sqrt{u_{1,1}}, \ldots, \sqrt{u_{n,n}}\right)$, ce qui est possible puisque pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\prod_{i=1}^k u_{i,i} = \det \Delta^k > 0$ (les $(u_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ sont donc strictement positifs).
  On pose $B = LD$ et $C = D^{-1}U$ qui vérifient toujours $A = BC$. Comme $A = A^*$, il en découle que $C^* B^* = BC$ ou encore

$$B^{-1} C^* = C (B^*)^{-1} \in \mathcal{TI}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{TS}_n(\mathbb{K}),$$

  qui est donc une matrice diagonale. Comme B et C ont même coefficients diagonaux, on en déduit que c'est en fait l'identité et on a $C = B^*$.

- Unicité. Si B_1 et B_2 conviennent, on a $B_2^{-1} B_1 = B_2^* (B_1^*)^{-1}$ et cette matrice, nommée D, est diagonale par les mêmes arguments que précèdemment. Comme $B_1 = B_2 D$, on remarque que $A = B_2 B_2^* = B_2 (DD^*) B_2^*$, d'où $D^2 = I_n$ puisque B_2 est inversible. Les coefficients diagonaux de la décomposition de CHOLESKY étant positifs, on a forcément $D = I_n$ et donc $B_1 = B_2$.

1. en fait il n'y a besoin de cette hypothèse que pour les $n-1$ premiers pivots