32. Densité des polynômes orthogonaux

[BMP05, §3.4, p140]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [BASE HILBERTIENNE DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX] *Soit ρ une fonction de poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$, alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.*

EXEMPLE. Sans l'hypothèse on a le contre-exemple suivant : soit la fonction de poids $w : x \longmapsto x^{-\ln(x)}$ sur $I = \mathbb{R}_+$. Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne forme pas une base de $L^2(I,w)$.

DÉVELOPPEMENT

On sait déjà que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, puisque[1] $x^n \in L^1(I,\rho)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en effet $|x|^n = O(e^{\alpha|x|})$). Remarquons de plus que $x^n \in L^2(I,\rho)$ pour les mêmes raisons.

Soit alors $f \in L^2(I,\rho)$. Définissons $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x)\rho(x)$ si $x \in I$.
Comme $|\varphi(x)| = |f(x)|\,\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x)$, on a

$$\int_I |\varphi(x)|\,dx \leq \frac{1}{2}\Big(\int_I \rho(x)dx + \int_I |f(x)|^2\,\rho(x)dx\Big) < +\infty$$

donc $\varphi \in L^1(I)$ et on peut considérer sa transformée de FOURIER

$$\hat{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \omega \longmapsto \int_I e^{-ix\omega} f(x)\rho(x)dx$$

On veut montrer que $\hat{\varphi}$ est prolongeable sur $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < \alpha/2\}$ en une application F holomorphe. Appliquons pour cela le théorème d'holomorphie sous le signe intégral à g définie par $g(z,x) = e^{-ixz} f(x)\rho(x)$ pour $z \in B_\alpha$ et $x \in I$, et 0 sinon :

- pour tout $z \in B_\alpha$, $g(z,.)$ est mesurable,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(.,x)$ est holomorphe,
- pour tout $z \in B_\alpha$, on a $\forall x \in I, |g(z,x)| \leq e^{\alpha|x|/2} f(x)\rho(x) = h(x)$ pour $x \in I$ et on vérifie que h est intégrable par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\int_I |h(x)|\,dx \leq \Big(\int_I e^{\alpha|x|}\,\rho(x)dx\Big)^{1/2}\Big(\int_I |f(x)|^2\,\rho(x)dx\Big)^{1/2} < +\infty$$

Ainsi $F : z \longmapsto \int_I e^{-ixz} f(x)\rho(x)dx$ est holomorphe sur B_α, et coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$.

1. on fait l'abus de notation x^n pour désigner $x \longmapsto x^n$

Supposons de plus que $f \in (x^n)^\perp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme F est holomorphe, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(0) = \int_I \partial_z^n(e^{-ixz} f(x)\rho(x))_{|0}dx = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)dx = (-i)^n\langle x^n \mid f\rangle = 0$$

Ainsi $F = 0$ au voisinage de 0, et par unicité du prolongement analytique F est nulle sur B_α. Ainsi $\hat{\varphi} = 0$ et donc par injectivité de la transformée de FOURIER sur L^1, on a que $\varphi = 0$, puis que $f = 0$ comme $\rho > 0$.

Finalement $\mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \mathrm{Vect}((x^n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$ (puisque $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$) donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $L^2(I,\rho)$. Comme de plus on sait que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Passons au contre-exemple. On vérifie dans un premier temps que $x^n \in L^2(I,w)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par un changement de variable $y = \ln(x)$).

Considérons alors $f : x \longmapsto \sin(2\pi\ln(x))$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\langle f \mid x^n\rangle &= \int_{\mathbb{R}_+} x^n \sin(2\pi\ln(x))x^{-\ln(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{(n+1)\ln(x)} \sin(2\pi\ln(x))\, e^{-\ln(x)^2}\,\frac{dx}{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y)\, e^{-y^2}\,dy && \text{CDV } y = \ln(x) \\
&= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi y)\, e^{-(y-\frac{n+1}{2})^2}\,dy \\
&= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi t + \pi(n+1))\, e^{-t^2}\,dy && \text{CDV } t = y - \frac{n+1}{2} \\
&= (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi t)\, e^{-t^2}\,dy \\
&= 0 && \text{par imparité}
\end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathrm{Vect}((x^n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp$ donc la famille des polynômes orthogonaux n'est pas totale, puisque $f \neq 0$.

COMMENTAIRES

Prendre le temps d'expliquer ce que l'on fait au début. Connaître des exemples de familles de polynômes orthogonaux !