DÉCOMPOSITION DE DUNFORD ET CALCUL DE L'EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE

[Gou09, §4.4, p193]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [DÉCOMPOSITION DE DUNFORD]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, $f = d + n$ et d commute avec n.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

APPLICATION. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. Notons $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$, de multiplicités $(\alpha_i)_{1\leq i\leq r}$, ou $(\mu_k)_{1\leq k\leq n}$ les racines de χ_M. Soient (D, N) la décomposition de DUNFORD de M, puis $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}DP = \Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Soit, pour $i \in [\![1, r]\!]$, p_i le projecteur sur $\ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} \ker(f - \lambda_j \operatorname{Id})^{\alpha_j}$. Alors on a :

$$\exp(M) = P \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\mu_1}, \dots, \mathrm{e}^{\mu_n}) P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \left[\sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(A - \lambda_i \operatorname{Id})^k}{k!} \right] P_i \,.$$

DÉVELOPPEMENT

χ_f étant scindé, écrivons-le sous la forme $\chi_f = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Par le lemme des noyaux, on a que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ où $N_i = \ker(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$.

LEMME. *Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Soit p_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$. Alors on a :*

$$p_i \in \mathbb{K}[f] \,, \qquad \textstyle\sum_{i=1}^{r} p_i = \operatorname{Id} \,, \qquad \textit{et} \qquad \forall i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0 \,.$$

Fixons $i \in [\![1, r]\!]$ et notons $M_i = X - \lambda_i$ et $Q_i = \frac{\chi_f}{M_i^{\alpha_i}} = \prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j}$. Les $(Q_i)_{1\leq i\leq r}$ sont premiers dans leur ensemble, donc il existe $(U_i)_{1\leq i\leq r}$ tels que $\sum_{i=1}^{r} U_i(f) \circ Q_i(f) = \operatorname{Id}$ par l'identité de BÉZOUT. Posons $p_i = U_i(f) \circ Q_i(f)$ et vérifions les propriétés demandées.

Déjà, on a bien $p_i \in \mathbb{K}[f]$ et $\sum_{i=1}^{r} p_i = \operatorname{Id}$. Puis, pour tout $j \neq i$, on a $\chi_f \mid Q_i Q_j$ d'où

$$p_i \circ p_j = U_i(f) \circ Q_i(f) \circ U_j(f) \circ Q_j(f) = Q_i(f) \circ Q_j(f) \circ U_i(f) \circ U_j(f) = 0$$

puisque les polynômes en f commutent. Reste à montrer que p_i est bien la projection annoncée. C'est une projection puisque $p_i = \sum_{j=1}^{r} p_i \circ p_j = p_i^2$.

Vérifions que $\operatorname{Im}(p_i) = N_i$.

- Si $y = p_i(x) \in \operatorname{Im}(p_i)$, alors $y \in N_i$ puisque

$$M_i^{\alpha_i}(f)(y) = M_i^{\alpha_i}(f) \circ p_i(x) = U_i(f) \circ \chi_f(f)(x) = 0 \,.$$

- Réciproquement si $x \in N_i$, alors $x = \sum_{i=1}^{r} p_i(x)$ mais $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ pour $j \neq i$ puisque $M_i^{\alpha_i} \mid Q_j$, donc $x = p_i(x) \in \operatorname{Im}(p_i)$.

Puis que $\ker(p_i) = \bigoplus_{j\neq i} N_j$.

- Pour tout $j \neq i$, on a $N_j \subset \ker(p_i)$ par ce qui précède et donc $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset \ker(p_i)$.
- Réciproquement, si $x \in \ker(p_i)$, alors $x = \sum_{j\neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j\neq i} N_j$.

Revenons à la décomposition de DUNFORD. Montrons l'existence de cette décomposition.
Posons $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \in \mathbb{K}[f]$. Dans une base concaténée des bases des $(N_i)_{1\leq i\leq r}$, la matrice de d est diagonale donc d est diagonalisable. Reste à poser $n = f - d = \sum_{i=1}^{r} (f - \lambda_i) \circ p_i \in \mathbb{K}[f]$ et vérifier qu'il est nilpotent. Par récurrence, on montre que $n^q = \sum_{i=1}^{r} (f - \lambda_i)^q \circ p_i$ pour tout entier q. Prenant $q = \max_{1\leq i\leq r} \alpha_i$, on obtient que $n^q = 0$, et donc n est nilpotent.

Pour l'unicité, soient $f = d + n = d' + n'$ deux décompositions. On suppose uniquement que d et n sont des polynômes en f. d' et n' commutent avec $f = d' + n'$ et donc avec d et n qui sont des polynômes en f. On a $d - d' = n' - n$ avec $d - d'$ diagonalisable car d et d' commutent et sont diagonalisables, et $n' - n$ est nilpotent (en utilisant la formule du binôme de NEWTON à la puissance égale à la somme des indices de nilpotence). Un endomorphisme diagonalisable et nilpotent est nécessairement nul, donc $d = d'$ et $n = n'$.

Passons à l'application. La première formule découle du calcul suivant :

$$\exp(M) = \exp(D + N) = \exp(D) \exp(N) = P \exp(\Delta) P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} \,,$$

où la deuxième égalité est vraie par commutativité de D et N, et la dernière par continuité du produit matriciel en utilisant que $D = P \Delta P^{-1}$.

Par ailleurs, la preuve ci-dessus assure que $D = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$ et $N = \sum_{i=1}^{r} (M - \lambda_i I_n) P_i$, d'où :

$$\exp(D) = \sum_{p\geq 0} \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i^p}{p!} P_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{p\geq 0} \frac{\lambda_i^p}{p!} P_i = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} P_i \,,$$

$$\exp(N) = \sum_{p\geq 0} \sum_{i=1}^{r} \frac{(M - \lambda_i I_n)^p}{p!} P_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(M - \lambda_i I_n)^p}{p!} P_i \,,$$

et on obtient finalement la deuxième formule.

COMMENTAIRES

Il faut connaître la méthode effective de calcul de la décomposition de DUNFORD.