29/03/15

Equation de la chaleur sur le cercle

209, 213, 222, 234, 235, 239, 241, 246

Théorème : $\mathbb{U} = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{U})$.

Il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$

telle que (i) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$.

(ii) $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ sur $\mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$.

(iii) $u|_{t=0} \xrightarrow[t\to 0]{L^2} u_0$.

De plus, u est C^∞.

dém : Unicité : Soit u une telle fonction. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

On note $c_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} u(x,t)\,dx$.

On a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\partial_t u(x,t)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\Delta_x u(x,t)\,dx$

Par intégration par parties, sachant que $\Delta_x u$ est continue et $e^{-ikx}\Delta_x u$ est 2π-périodique en x, les termes de bord s'annulent et le second membre vaut : $(-ik)^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} u(x,t)\,dx$

D'autre part, $\forall I$ segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$

- à $x \in \mathbb{U}$ fixé, $t \mapsto e^{-ikx} u(x,t)$ est de classe C^1 sur I
- à $t \in I$ fixé, $x \mapsto$ ——— est continue sur $\mathbb{U}$.
- $\forall x \in \mathbb{U}, \forall t \in I$, $|e^{-ikx}\partial_t u(x,t)| \leq \sup_{[0,2\pi]\times I} |\partial_t u|$, intégrable sur $[0,2\pi]$,

donc par théorème de dérivation sous l'intégrale,

$\forall t \in I$, $c_k'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\partial_t u(x,t)\,dx = -k^2 c_k(t)$.

Cette égalité vaut $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$.

On a donc $c_k(t) = c_k e^{-k^2 t}$.

A t fixé, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe C^1 et 2π-périodique, donc égale à sa série de Fourier :

$\forall x \in \mathbb{U}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-k^2 t} e^{ikx}$.

Déterminons c_k : on note d_k les coefficients de Fourier de u_0.

D'après la formule de Parseval, $\|u(\cdot,t) - u_0\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k e^{-k^2 t} - d_k|^2$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|c_k e^{-k^2 t} - d_k| \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Donc $c_k = d_k$.

On a ainsi prouvé l'unicité de la solution.

Existence : On pose $u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{-k^2 t} e^{ikx}$.

On applique l'égalité de Parseval à u_0 : $\|u_0\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2$,

donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|d_k| \leq \|u_0\|_2$.

Soit $t_0 > 0$.

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, on peut établir la majoration : pour tout $t \geq t_0$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k (-k^2)^\alpha (ik)^\beta e^{-k^2 t} e^{ikx}| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u_0\|_2 . |k|^{2\alpha + \beta} e^{-k^2 t_0}$$

donc u ainsi que toutes ses dérivées convergent normalement sur $\mathbb{U} \times [t_0, +\infty[$. u est ainsi de classe C^∞ sur $\mathbb{U} \times [t_0, +\infty[$ $\forall t_0 > 0$, donc sur $\mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$, d'où (i).

On vérifie facilement que $\partial_t u = \Delta_x u$, d'où (ii).

Enfin, $\|u(\cdot,t) - u_0\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k e^{-k^2 t} - d_k|^2$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2 |e^{-k^2 t} - 1|^2$$

en majorant par $|d_k|^2$, qui est sommable (d'après la formule de Parseval), on montre par théorème de convergence dominée que

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_2^2 \xrightarrow[t \to 0]{} 0, \text{ d'où (iii)}.$$