CARACTÉRISATION DES ENDOMORPHISMES SEMI-SIMPLES

[Gou09, §4.5, p224–226]

ÉNONCÉ

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

THÉORÈME. *$f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si et seulement si π_f est sans facteur carré.*

DÉVELOPPEMENT

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Écrivons, par factorialité, sa décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$:

$$\pi_f(X) = \prod_{k=1}^{r} P_k^{m_k}$$

(les $(P_k)_{1 \le k \le r}$ étant tous distincts et unitaires). Par le lemme des noyaux, on a que

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \underbrace{\ker P_k^{m_k}(f)}_{=N_k} .$$

LEMME. *Soit F un sous-espace stable de E. Posons $F_k = F \cap N_k$ pour $k \in [\![1, r]\!]$. Alors*

$$F = \bigoplus_{k=1}^{r} F_k .$$

Soit F un sous-espace stable de E. Il est clair que les $(F_k)_{1 \le k \le r}$ sont en somme directe, et que $\bigoplus_{k=1}^{r} F_k \subset F$ puisque chaque F_k est inclus dans F.

Réciproquement, vérifions que $F \subset \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$. Notons p_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$. p_i étant un polynôme en f, et F étant f-stable, on a que $p_i(F) \subset F$ mais par ailleurs $p_i(F) \subset \mathrm{Im}(p_i) = N_i$, donc $p_i(F) \subset F \cap N_i = F_i$. Comme $\sum_{k=1}^{r} p_k = \mathrm{Id}_E$, on en déduit que :

$$F = \sum_{k=1}^{r} p_k(F) \subset \bigoplus_{k=1}^{r} F_k .$$

LEMME. *Supposons π_f irréductible. Alors f est semi-simple.*

Soit F un sous-espace f-stable distinct de E. Prenons $x_1 \notin F$ et soit $E_1 = \mathbb{K}[f](x_1)$. C'est un sous-espace f-stable. Comme $\pi_{f,\, x_1}$ est le polynôme minimal de $f_{|E_1}$, on a $\pi_{f,\, x_1} \mid \pi_f$ donc $\pi_{f,\, x_1} = \pi_f$ par irréductibilité.

Supposons qu'il existe $y = P(f)(x_1) \in E_1 \cap F$ tel que $y \neq 0$. Comme $\pi_{f,\, x_1}$ est irréductible et $\pi_{f,\, x_1} \nmid P$, P et $\mu_{f,\, x_1}$ sont premiers entre eux donc par l'identité de BÉZOUT il existe U et V tels que $UP + V\pi_{f,\, x_1} = 1$, et alors $x_1 = U(f)(y) \in F$ puisque F est f-stable, ce qui est absurde.

Donc E_1 et F sont en somme directe. Si $E_1 \oplus F = E$, on a trouvé un supplémentaire f-stable. Sinon on choisit $x_2 \in E \setminus (E_1 \oplus F)$ et on recommence. En un nombre fini d'itérations, on obtientun sous-espace $E_1 \oplus \dots \oplus E_\ell$ qui est f-stable et supplémentaire de F.

Montrons désormais le théorème par double implication.

- Supposons π_f sans facteur carré.
  Soit F un sous-espace vectoriel f-stable. Écrivons, avec $N_k = \ker P_k(f)$:

$$F = \bigoplus_{k=1}^{r} \underbrace{F \cap N_k}_{=F_k} .$$

  Fixons $k \in [\![1, r]\!]$. Comme N_k est f-stable, on regarde $f_{|N_k}$, qui admet pour polynôme minimal P_k qui est irréductible, donc par ce qui précède il existe G_k supplémentaire f-stable de F_k dans N_k. Alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} (F_k \oplus G_k) = \left(\bigoplus_{k=1}^{r} F_k \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{k=1}^{r} G_k \right) = F \oplus G ,$$

  où $G = \bigoplus_{k=1}^{r} G_k$ est f-stable puisque chaque G_k l'est. Donc f est semi-simple.
- Supposons f semi-simple et l'un des $(m_k)_{1 \le k \le r}$ strictement supérieur à 1, disons m_i.
  Posons $F = \ker P_i(f)$ qui est f-stable.
  f étant semi-simple, F admet un supplémentaire G qui est f-stable. Soit alors $M_i = \frac{\pi_f}{P_i^2}$.
  On a, d'une part, $P_i M_i(f)(G) \subset F$ puisque $P_i(f)(P_i M_i)(f)(G) = \pi_f(f)(G) = 0$ et, d'autre part, $P_i M_i(f)(G) \subset G$, du fait que G est f-stable. Ainsi

$$P_i M_i(f)(G) \subset F \cap G = \{0\} .$$

  Comme par ailleurs

$$P_i M_i(f)(F) \subset P_i(f)(F) = \{0\} ,$$

  et F et G sont supplémentaires, on a que $P_i M_i$ annule f, ce qui est absurde par définition du polynôme minimal π_f, comme

$$\deg(P_i M_i) < \deg(P_i^2 M_i) = \deg(\pi_f) .$$

  Ainsi tous les $(m_k)_{1 \le k \le r}$ sont égaux à 1. Donc π_f est sans facteur carré.