# 29. Calcul d'une intégrale par le théorème des résidus

**[Tau06, §15.2, p192]**

## ÉNONCÉ

**Exemple.** Soit $-1<\alpha<1$. Alors $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln(x)}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\pi}{2}\alpha)}$.

---

## DÉVELOPPEMENT

- Vérifions que $I_\alpha$ est bien définie.
  On a d'une part $\frac{x^\alpha\ln(x)}{x^2-1} \sim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = o(\frac{1}{x^\varepsilon})$ où $-\alpha<\varepsilon<1$ donc la fonction est intégrable en $0$, et d'autre part $\frac{x^\alpha \ln(x)}{x^2-1} \sim_{x\to 0} x^{\alpha-2}\ln(x) = o(x^{\alpha-2+\varepsilon}) = o(\frac{1}{x^{2-(\alpha+\varepsilon)}})$ pour $0<\varepsilon<1-\alpha$ et donc la fonction est intégrable en $+\infty$.

  Enfin on a $\ln(x) = \ln(1+x-1) \sim_{x\to 1} x-1$ donc la fonction est continue en $1$.

- Considérons $\mathrm{Log}$ une détermination du logarithme complexe sur $U=\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}_-$ telle que $\mathrm{Log}(1)=0$ et définissons $z^\alpha = \exp(\alpha\,\mathrm{Log}(z))$ pour $z\in U$.

  Posons enfin $f : z \longmapsto \frac{z^\alpha \mathrm{Log}(z)}{z^2-1}$ sur $U$. C'est une fonction méromorphe ayant pour pôles $-1$ et $1$ qui sont au plus simples. On peut donc considérer le chemin $\gamma$ suivant :

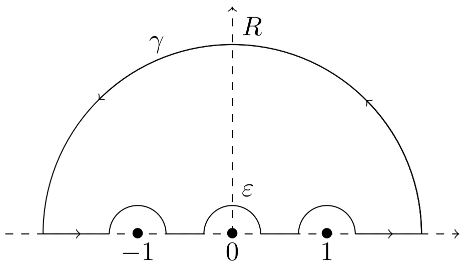


Figure 1 – Le chemin $\gamma$

  L'intégrale de $f$ sur $\gamma$ est nulle par le théorème des résidus.

Dans la suite on pose $\gamma_{a,r}(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it}$ pour $t\in[0,\pi]$, avec $a\in\mathbb{C}$ et $r>0$.

- On a :
$$\left|\int_{\gamma_{0,r}} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi ir\,\mathrm{e}^{it} f(r\,\mathrm{e}^{it})dt\right| \leq \left|\int_0^\pi \frac{r^{\alpha+1}}{|r^2-1|}(|\ln(r)|+\pi)dt\right|$$
$$\leq \pi\frac{r^{\alpha+1}}{|r^2-1|}(|\ln(r)|+\pi)$$
  puisque $|\mathrm{Log}(r\,\mathrm{e}^{it})| = |\ln(r)+it| \leq |\ln(r)|+\pi$ et la seconde inégalité triangulaire donne que $|r^2\,\mathrm{e}^{2it}-1| \geq ||r^2\,\mathrm{e}^{2it}|-|-1|| = |r^2-1|$.
  En faisant tendre $r$ vers $0$ et $+\infty$, on obtient que l'intégrale tend vers $0$.

- Remarquons que $\mathrm{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1} \frac{z^\alpha \mathrm{Log}(z)}{z+1} = \frac{1^\alpha \mathrm{Log}(1)}{2} = 0$ donc en fait $f$ est holomorphe en $1$, donc continue. Ainsi $\int_{\gamma_{1,\varepsilon}} f(z)dz$ tend vers $0$ lorsque $\varepsilon$ tend vers $0$.

- D'autre part on a $\mathrm{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1}\frac{z^\alpha \mathrm{Log}(z)}{z+1} = \frac{(-1)^\alpha \times i\pi}{-2} = -\frac{i\pi}{2}\mathrm{e}^{i\pi\alpha}$.
  Or, $\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} f(z)dz = \int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} \frac{\mathrm{Res}(f,-1)}{z+1} + g(z)dz$ où $g$ est une fonction holomorphe.
  Faisant tendre $\varepsilon$ vers $0$, l'intégrale de $g$ tend vers $0$ et :
$$\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} \frac{\mathrm{Res}(f,-1)}{z+1}dz = i\pi\,\mathrm{Res}(f,-1)$$
  Ainsi $\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} f(z)dz$ tend vers $i\pi\,\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{\pi^2}{2}\mathrm{e}^{i\pi\alpha}$ lorsque $\varepsilon$ tend vers $0$.

- En faisant tendre les rayons vers $0$ ou $+\infty$ sur le chemin, on obtient que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^\alpha \mathrm{Log}(x)}{x^2-1}dx - \frac{\pi^2}{2}\mathrm{e}^{i\pi\alpha} = 0$$
  Or
$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^\alpha \mathrm{Log}(x)}{x^2-1}dx = (-1)^\alpha \int_{-\infty}^0 \frac{|x|^\alpha \ln(|x|)}{x^2-1}dx + (-1)^\alpha i\pi \int_{-\infty}^0 \frac{|x|^\alpha}{x^2-1}dx$$
$$= \mathrm{e}^{i\pi\alpha} I_\alpha + \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\, i\pi \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{x^2-1}dx$$
  Donc $\frac{1+\mathrm{e}^{i\pi\alpha}}{\mathrm{e}^{i\pi\alpha}} I_\alpha + i\pi\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{2}$. En prenant la partie réelle, il vient
$$I_\alpha = \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\Re(\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}+1)}$$
  Puis $\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}+1 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}\,2\cos(\frac{\pi}{2}\alpha)$ d'où $\Re(\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}+1) = 2\cos^2(\frac{\pi}{2}\alpha)$ et finalement :
$$I_\alpha = \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}\alpha)}$$