Théorème de Rice

Réf : Wolper : Introduction à la calculabilité

Th : Toute propriété non triviale des langages récursivement énumérables est indécidable

Démo • Soit P une propriété non triviale sur les langages : il existe une machine M_P qui accepte un langage ayant la propriété P et une machine $M_{\bar{P}}$ qui accepte un langage qui n'a pas la propriété.

• On va réduire le problème de l'arrêt à la décision d'une propriété P : soit $\langle M, w \rangle$ une instance du problème de l'arrêt, on construit une machine M_P' qui sur l'entrée x a le comportement suivant :

1) Elle simule l'exécution de M sur w
2) Si M s'arrête sur w, elle simule M_P sur x
(3) Sinon, elle rejette tous les mots)

On construit de même une machine $M_{\bar{P}}'$ qui simule $M_{\bar{P}}$ si M accepte w.

• On va montrer que M s'arrête sur w $\iff (L(M_P') \in P \lor L(M_{\bar{P}}') \notin P)$:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si M accepte w, alors $L(M_P') = L(M_P) \in P$
et $L(M_{\bar{P}}') = L(M_{\bar{P}}) \notin P$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si M refuse w ou que M diverge sur w, alors $L(M_P') = \emptyset = L(M_{\bar{P}}')$
et donc $\emptyset \in P \lor \emptyset \notin P$ est vraie.

□

Prop : Le problème de l'arrêt est indécidable

Démo • Supposons qu'il existe une machine M qui décide le problème de l'arrêt. Alors on construit une machine M' qui prend en entrée le code d'une machine et qui fait ce qui suit :

$M'(\langle N \rangle)$: SI $M(\langle N, \langle N \rangle \rangle)$ ALORS Diverger
SINON Accepter.

- Montrons maintenant qu'on a une absurdité en lançant M sur $\langle M', \langle M' \rangle \rangle$:
  - Si M accepte $\langle M', \langle M' \rangle \rangle$, alors M' est sensé s'arrêter sur $\langle M' \rangle$, or elle diverge par déf de M'
  - Si M n'accepte pas $\langle M', \langle M' \rangle \rangle$, alors M' est sensé diverger mais par déf de M', elle accepte $\langle M' \rangle$

- On a donc que le pb de l'arrêt est indécidable par argument diagonal $\square$

<u>Rem</u> : Ce sont des propriétés du langage reconnu, pas des machines qui reconnaissent ces langages.
Par exemple $\{ \langle M \rangle \mid M \text{ a au plus } k \text{ états} \}$ est décidable bien que non-trivial