Théorie des ordres denses

Réf. DNR : Introduction à la logique

Déf : Soit T_0 la théorie écrite sur le langage $\mathcal{L}_0 = \{<, =\}$ et avec comme axiomes :

(O_1) $\forall x, y,\ \neg(x<y \wedge y<x)$ — antisymétrie
(O_2) $\forall x, y, z,\ (x<y \wedge y<z \rightarrow x<z)$ — trans
} ordre strict
(O_3) $\forall x, y\ (x<y \vee x=y \vee y<x)$ — total
(O_4) $\forall x, y\, \exists z\ (x<y \rightarrow x<z \wedge z<y)$ — dense
(O_5) $\forall x \exists y\ (x<y)$
(O_6) $\forall x \exists y\ (y<x)$
} pas de plus gd ou pt élt

Prop : (i) Les modèles de T_0 sont infinis
(ii) T_0 possède des modèles non isomorphes
(iii) T_0 est non contradictoire.

Démo (i) Un ensemble totalement ordonné fini admet un plus grand élément
(ii) $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$ sont des modèles de T_0 non isomorphes
(iii) D'après (ii), T_0 admet un modèle, donc elle est non contradictoire □

Prop : La théorie T_0 admet l'élimination des quantificateurs

Démo • Il suffit de montrer que pour toute formule sans quantificateurs $F(x, x_1, \ldots, x_n)$, il existe une formule sans quantificateur $G(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $T_0 \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n\ ((\exists x\ F) \leftrightarrow G)$

• On élimine les négations dans les formules de T_0 : d'après (O_3), on a $T_0 \vdash \neg(x=y) \Leftrightarrow (x<y \vee y<x)$ et $T_0 \vdash \neg(x<y) \leftrightarrow (x=y \vee y<x)$, donc la formule $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ est équivalente, modulo T_0 à la forme disjonctive : $\bigvee_k \bigwedge_\ell H_{k\ell}$ où les $H_{k\ell}$ sont des formules atomiques de l'une des formes suivantes :

$x=x$	$x<x$	$\perp$
$x=x_i$	$x<x_i$	$\top$
$x_i=x_j$	$x_i<x$	
	$x_i<x_j$	

- On peut éliminer les formules $x=x$, $x_i=x_i$ qui sont équivalentes à $\top$
  $x<x$, $x_i<x_i$ —— $\perp$

- On peut aussi éliminer $\perp$ et $\top$ d'après $\vdash \perp \wedge A \Leftrightarrow \perp$ et $\vdash \top \wedge A \Leftrightarrow A$.

- Comme $\vdash \exists x\,(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x A) \vee (\exists x B)$, il suffit de montrer le résultat pour une formule K de la forme $\exists x K \equiv \exists x \bigwedge_n K_n$ où les K_n sont des formules atomiques de la forme : $x=x_i$ $\quad x<x_i$
  $x_i=x_j$ $\quad x_i<x$
  $x_i<x_j$

- On distingue deux cas, suivant si $x=x_i$ est présent :
  * Si K contient au moins un $x=x_i$, alors $\exists x K$ est équivalente à $K[x:=x_i]$ d'après les axiomes de l'égalité
  * Si K ne contient aucun $x=x_i$, alors $\exists x K$ est équivalent à $K_1 \wedge (\exists x K_2)$ où $\begin{cases} K_1 = \bigwedge_n K_{1,n} \text{ avec } K_{1,n} \text{ de la forme } x_i=x_j \;\; x_i<x_j \\ K_2 = \bigwedge_n K_{2,n} \text{ avec } K_{2,n} \text{ de la forme } x<x_i \;\; x_i<x \end{cases}$

  Ainsi $\exists x K_2$ est équivalent à $\exists x \left[\left(\bigwedge_{i\in I} x<x_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\in J} x_j<x\right)\right]$.
  - Si $I \cap J \neq \emptyset$, alors $\exists x K_2$ est équiv à $\perp$
  - Si $I \cap J = \emptyset$ et si $I \neq \emptyset$ où $J \neq \emptyset$, alors comme l'ordre est dense, $\exists x K_2$ est équiv à $\bigwedge_{i\in I, j\in J} x_j < x_i$
  - Si $I = \emptyset$ (ou $J=\emptyset$), la formule $\exists x K_2$ est équiv à $\top$ d'après O_5 (resp O_6)

$\square$

Coro: La théorie T_0 est décidable et complète.

Rq: Comme $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ sont des modèles de T_0 mais sont non isomorphes car $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe, cela montre que la connexité ne peut pas s'exprimer en premier ordre sur $\mathcal{L}_0$