Réf : Carton

Rationnalité du langage de pile

Dans ce développement, on montre que le langage formé par les contenus de pile durant les executions de l'automate est rationnel. On utilise des notions de réécriture via des formes normales.

Définition (Langage de pile). *Etant donné un automate à pile $A = (\Sigma, Z, z_0, Q, q_0, \delta)$, avec Σ l'alphabet d'entrée, Z l'alphabet de pile, z_0 le symbole initial de pile, Q l'ensemble des états, q_0 l'état initial, et δ la fonction de transition, on définit le langage de pile H par :*

$$H_A = \{h \in Z^* \mid \exists w \in A^*,\ \exists q \in Q,\ (q_0, z_0) \xrightarrow{w} (q, h)\}$$

Le théorème qu'on cherche à démontrer est :

Theorème. *Pour tout automate à pile A, le langage H_A est rationnel.*

Préliminaire :

On dit que deux transitions sont consécutives si l'état d'arrivée de la première correspond à l'état de départ de la deuxième : $q \xrightarrow{a} q' \xrightarrow{b} q''$. Un résultat assez classique qui donne une idée pour prouver le théorème :

Lemme. *Etant donné un automate A (avec ou sans pile), l'ensemble K_A des suites consécutives de transitions de A est un ensemble rationnel.*

Démonstration. L'idée de la preuve est que si une suite consécutive de transitions est de taille plus grande que le nombre de sommets, elle contient forcement une boucle (même idée que pour prouver le lemme de l'étoile). Pour chaque paire d'état (q, q'), on définit l'ensemble $K_{q,q'}$ des suites consécutives de transitions allant de l'état q à l'état q' sans passer deux fois par le même sommet, qui est rationnel car fini. On a :

$$K_A = \bigcup_{q \in Q} \left(K_{q_0,q} \bigcup_{r \in Q} (K_{q_0,r}.K^*_{r,r}.K_{r,q}) \right)$$

Ainsi K_A est rationnel. □

Première idée :

- Si $Z = \{a_1, \ldots, a_n\}$, on "enrichit" Z avec de nouvelles lettres $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}\}$ et on pose $\overline{Z} = Z \cup \{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}\}$.
- On définit un morphisme μ qui à chaque transition $q, a \xrightarrow{y} q', h$, associe un mot de $\overline{Z}$: $\overline{a}\tilde{h}$, où $\tilde{h}$ est le miroir de h. L'idée étant que la lettre $\overline{a}$ correspond à consommer a sur la pile, et on prends le mot miroir pour simuler une pile (first-in last-out).
- L'ensemble K_A étant rationnel, le langage $K = \mu(K_A)$ est rationnel.
- Pour obtenir H_A à partir de K, il nous reste 3 étapes : réduire les mots de z_0K en utilisant la règle $a\overline{a} \to \varepsilon$ pour toute lettre $a \in Z$; puis ne garder que les réduits qui correspondent à une execution possible de l'automate, qui ne contienne donc plus de $\overline{a}$; puis il faut prendre le miroir du langage obtenu.

La réécriture entre en jeu :

- On définit la règle de réécriture sur $\overline{Z}^*$ par : $xa\overline{a}y \longrightarrow xy$.
- Cette relation est évidemment terminante, puisqu'elle fait strictement diminuer la taille du mot.
- Elle est aussi localement confluente donc **par Newman** elle est confluente et donc convergente.
- Chaque mot w de $\overline{Z}^*$ possède donc une unique forme normale $\rho(w)$ pour cette relation.
- On s'interesse donc au langage $\rho(z_0K)$, mais ce n'est pas clair pourquoi l'opération ρ conserve la rationnalité du langage. On va en fait montrer qu'il s'agit de l'inverse d'une substition, et conclure par un lemme admis.

De la substitution :

- On définit d'abord le langage de Dyck D sur $\overline{Z}$ comme les mots "bien parenthésés" en considérant que toute lettre $a \in Z$ est une parenthèse ouvrante et que $\overline{a}$ est sa parenthèse fermante associé. L'interêt de ce langage D est qu'on peut facilement montrer qu'il correspond aux mots qui se réduisent à ε : $D = \{w | \rho(w) = \varepsilon\}$
- On définit maintenant la substitution σ par : $\sigma(a) = D^*aD^*$ et on montre facilement que pour un mot $w \in \overline{Z}^*$, on a $\sigma(w) = \{w' | w' \xrightarrow{*} w\}$.

Lemme (Admis). *Soit σ une substitution de A^* dans B^* et soit $K \subseteq B^*$ un langage rationnel. Alors le langage $\sigma^{-1}(K) = \{w \in A^* | \sigma(w) \subseteq K\}$ est rationnel.*

Démonstration. La preuve de ce résultat utilise la caractérisation des langages rationnel par reconnaissance par monoïde. En effet, supposons que K est reconnu par le monoïde M, avec le morphisme associé $\mu : B^* \to M$ et $P \subseteq M$ tels que $K = \mu^{-1}(P)$. Montrons que $L = \sigma^{-1}(K)$ est reconnu par le monoïde $\mathcal{P}(M)$. On définit le morphisme $\overline{\mu} : A^* \to \mathcal{P}(M)$ par $\overline{\mu}(a) = \mu(\sigma(a))$. On vérifie que pour $w \in A^*$, on a $\overline{\mu}(w) = \mu(\sigma(w))$ On a $L = \overline{\mu}^{-1}(Q)$, avec $Q = \{T | T \subseteq P\}$, et donc L est bien reconnu par $\mathcal{P}(M)$. □

Corollaire. *Pour tout langage rationnel K de $\overline{Z}^*$, le langage $\rho(K)$ est rationnel.*

Démonstration. On a immédiatement $\rho(K) = \sigma^{-1}(K)$ pour la substition σ défini ci-dessus, donc $\rho(K)$ est rationnel en vertu du lemme précédent. □

Conclusion :

- L'ensemble K_A est rationnel, donc $z_0\mu(K_A)$ est rationnel.
- D'après le corollaire, le langage $\rho(z_0\mu(K_A))$ est aussi rationnel.
- Par propriété de cloture des langages rationnels, $\tilde{H}_A = \rho(z_0\mu(K_A)) \cap Z^*$ est aussi rationnel.
- Le miroir est aussi une opération qui conserve la rationnalité, donc H_A est égalemment rationnel.

□