Problème du voyageur de commerce euclidien approché

Réf : Cormen

Prop : PVC est NP-complet

Démo
- PVC $\in$ NP car il suffit de vérifier qu'un chemin passe par tous les sommets
- PVC est NP-dur par réduction à HAMILTONIEN : soit $G = (S, A)$ une instance de HAMILTONIEN. On définit la fonction de poids sur $S \times S$ par

$$c(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u,v) \in S \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a une solution de (G, c) de poids ≤ 0 (donc $= 0$) si et seulement si G admet un cycle hamiltonien

□

Prop : Si $P \neq NP$, alors pour toute constante $\rho \geq 1$, il n'y a pas d'algorithme d'approximation à temps polynomial et à garantie de performance ρ pour le problème général du PVC.

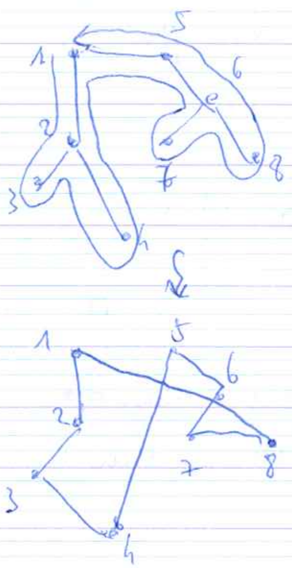
Démo
- Par l'absurde : supposons que pour un certain ρ plus grand que 1, il existe un algo d'approx B de ratio ρ. Sans perte de généralité, on suppose que ρ est entier et on montre comment utiliser B pour résoudre HAMILTONIEN en temps poly, ce qui donnera le résultat puisque HAMILTONIEN est NP-complet
- Soit $G = (S, A)$ une instance de HAMILTONIEN. On définit la fonction de coût sur $S \times S$: $c(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) \in A \\ \rho|S| + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

* Si le graphe G possède un cycle hamiltonien, alors il existe une solution au PVC de coût $|S|$ (puisque autant d'arête que de sommet dans un cycle hamiltonien)
* Si le graphe G ne possède pas de cycle hamiltonien, alors toute solution du PVC va prendre une arête $\notin A$, donc va être de coût $> \rho|S|$.

• Ainsi, si on lance B sur l'instance du PVC, on a la garantie que le coût de la solution n'est pas supérieur à p fois la solution optimale.
Si G contient un cycle hamiltonien, les inégalités précédentes montrent qu'il renverra forcément ce cycle.

□

<u>Prop:</u> Si la fonction de coût vérifie l'inégalité triangulaire, alors il existe une 2-approx pour le PVC.



Démo • L'algorithme utilise un arbre couvrant de G :

2-APPROX(G,c)
- Soit v un sommet qcq
- Calculer un ACM T pour G depuis v
- Soit L la liste des noeuds visités dans un parcours préfixe de T
- RENVOYER le cycle hamiltonien correspondant à L

• Soit H^* une tournée optimale. Puisque T est un ACM, on a $c(T) \leq c(H^*)$.
Le parcours complet W passe deux fois par chaque arête (une fois en descendant, une fois en remontant), on a $c(W) = 2c(T) \leq 2c(H^*)$
Or, les arêtes que l'on enlève entre W et H correspondent à des inégalités triangulaires de c : par exemple on remplace les arêtes (4,2), (2,1), (1,5) par (4,5).
On a donc $c(H) \leq c(W)$

Ainsi $\underline{c(H) \leq 2c(H^*)}$

□