Groupe totalement ordonnable

Réf : $\emptyset$

Déf : Un groupe est dit totalement ordonnable s'il peut être muni d'un ordre total compatible avec l'opération de groupe

Th : Tout groupe abélien est totalement ordonnable ssi il est sans torsion.

Démo : • On va utiliser le théorème de compacité du calcul propositionnel qui dit que tout ensemble E de formules du calcul propositionnel est satisfaisable ssi il est finiment satisfaisable.

$\Rightarrow$ Soit $\leq$ un ordre total sur G compatible et $x \in G$. Supposons $1 \leq x$, alors par compatibilité on a $x \leq x^2$ et par suite $x \leq x^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Ainsi, si $x^i = 1$, on a par transitivité et antisymétrie, $x = 1$
Le cas $1 \geq x$ étant symétrique, on a bien que G est sans torsion

$\Leftarrow$ • On définit l'ensemble des variables propositionnelles, $V = \{A_{x,y} \mid x,y \in G\}$ et l'ensemble des formules suivantes :

- $Refl(G) = \{A_{x,x} \mid x \in G\}$
- $Anti(G) = \{\neg(A_{x,y} \wedge A_{y,x}) \mid x \neq y,\ x,y \in G\}$
- $Trans(G) = \{(A_{x,y} \wedge A_{y,z}) \Rightarrow A_{x,z} \mid x,y,z \in G\}$
- $Total(G) = \{A_{x,y} \vee A_{y,x} \mid x,y \in G\}$
- $Comp(G) = \{A_{x,y} \Rightarrow A_{x.z,y.z} \mid x,y,z \in G\}$

$O(G) = Refl(G) \cup Anti(G) \cup Trans(G) \cup Total(G) \cup Comp(G)$

• Lemme 1 : G est totalement ordonnable ssi $O(G)$ est satisfiable

Dem : Toute valuation est équivalente à une relation R sur G via $x R y \Leftrightarrow \delta(A_{x,y}) =$
Cette valuation satisfait $O(G)$ ssi elle définit une relation d'ordre compatible avec

• Lemme 2 : Si tout groupe du type fini de G est total ordonnable, alors G est totalement ordo

Dém : Soit B une partie finie de $\mathcal{O}(G)$. L'ensemble des éléments de G apparaissant dans aucune une variable de B sont en nombre fini et engendrent un sous groupe H (de type fini). H est total ordonnable par hypothèse, donc $\mathcal{O}(H)$ est satisfiable par lemme 1, et donc $B \subset \mathcal{O}(H)$ aussi. Par théorème de compacité, $\mathcal{O}(G)$ est satisfiable et donc par lemme 1, G est total ordonnable. $\square$

- Lemme 3 : Si H groupe abélien est de type fini sans torsion, alors il est totalement ordonnable.

Dém : Par classification des groupes abéliens de type fini, on a $H \simeq (\mathbb{Z}^q, +)$ pour un certain q. Or $(\mathbb{Z}^q, +)$ est totalement ordonnable via l'ordre lexicographique, que l'on note $\leq_{lex}$. Ainsi l'ordre défini sur H par $x \leq_H y \iff \phi(x) \leq_{lex} \phi(y)$, où ϕ est un iso entre H et $\mathbb{Z}^q$, définit un ordre total compatible sur H. $\square$

- On achève la preuve en remarquant que si G est sans torsion, alors ses sous-groupes H le sont aussi.

$\square$