

Sujet choisi : 2.14 Théorème d'inversion locale, théorie des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie

DEV

Dans tout le plan,  $(n, q, m) \in \mathbb{N}^3$ , et  $U$  et  $V$  sont ouverts ;  $q \geq 1$

## I) Théorème d'inversion locale

### 1. Le Théorème

Def 1: On dit que  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^q$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$  si elle admet une racine inverse de classe  $C^k$ . On dit alors que  $U$  et  $V$  sont difféomorphes.

Ex 2: Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont tous difféomorphes.  
Dans  $\mathbb{R}^2$ , l'intérieur d'un cercle est difféomorphe à un cercle ouvert

Thm 3 (inversion locale): Soit  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , et  $a \in U$  tel que  $df(a)$  soit inversible. Alors il existe  $V \subseteq U$  contenant  $a$  tel que  $f: V \rightarrow f(V)$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme

Rmq 4: Interprétation géométrique (Fig 1)  
C'est un corollaire du théorème de Banach  
C'est exactement un changement local de coordonnées

Ex 5:  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

### 2. Applications

App 6: L'expontentielle matricielle est un difféomorphisme local en  $0$ . Soit  $\text{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  est surjective.

App 7:  $\Phi: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^q$  est un difféomorphisme au voisinage de  $I_n$ . On peut donc y définir des racines  $k$ -ièmes de matrices.

Lemme 8 (réduction forme quadratique): Soit  $Q_0 \in \mathbb{P}_m^n(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_m(\mathbb{R})$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $Q_0$  dans  $\mathbb{P}_m^n(\mathbb{R})$  et  $M \in \mathcal{C}^1(V, \text{GL}_m(\mathbb{R}))$  tel que:  
 $\forall A \in V, A = M(Q_0) Q_0^{-1} M(A)$

Thm 9 (Lemme de Kraso): Soit  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $C^1$ , dont  $0$

est un point critique non-dégénéré. Notons  $(p, n-p)$  la signature de  $df(0)$ . Alors il existe un  $C^1$ -difféomorphisme  $\varphi: U \rightarrow V$  vérifiant  $\varphi(0) = 0$  telle que:

$$\forall \alpha \in U, f(\varphi(\alpha)) = u(\alpha)^1 + \dots + u(\alpha)^p - u(\alpha)^{p+1} - u(\alpha)^{p+2} - \dots - u(\alpha)^q$$

App 10: Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, C^3$ , et  $S = \{(x, y, z) / z = f(x, y)\}$ . Soit  $a \in \mathbb{R}^2$  critique non-dégénéré de  $f$ . Alors:  
- si  $d^2f(a)$  a pour signature  $(2, 0)$ ,  $S$  est au-dessus de son plan tangent en  $a$ .

- $(0, z), S$  est au-dessous —
- $(1, z), S$  traverse son plan tangent en  $a$

### 3. Premières variantes

Rmq 11: le Thm 3 reste vrai avec hypothèse et conclusion holomorphie. Etre localement inversible n'est PAS être inversible... renvoie à l'équation d'un cercle ou à Fig 2.

Prop 12: Soit  $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, C^k$ . Si  $df$  est partout inversible,  $f$  est ouverte.

Thm 13 (inversion globale): Soit  $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, C^k$ . Alors  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$  si et seulement si  $f$  est injective et  $df$  partout inversible.

App 14: Existence et unicité de la solution à la loi de conservation:  
(inconnue:  $u(t, x)$ )  $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \text{Initial: } u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$

## II) Théorème de fonctions implicites

### 1. Le théorème

Thm 15 (fonction implicite): Soit  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  de classe  $C^1$ . Soit  $(a, b) \in U$  tel que  $f(a, b) = 0$  et que la différentielle de  $y \mapsto f(a, y)$  soit inversible.

Alors il existe  $V_\alpha, V_\beta$  voisinage de  $(\alpha, \beta)$  dans  $\mathbb{U}$  et  
 $\varphi: V_\alpha \rightarrow V_\beta$  de classe  $C^1$  telle que:

$$\forall (a, y) \in V_\alpha \times V_\beta, (\beta(\alpha, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(a))$$

Rmq 16: - Interprétation géométrique (Fig 3)  
 . Équivalent à l'inversion locale

Ex 17: Dans le cas d'un cercle, on peut expliciter les fonctions implicites sur chaque demi-cercle. Sur les deux supérieures / inférieures,  $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ .

### 2. Quelques applications

App 18: Soit  $P_0 \in \mathbb{R}_n[x]$  et  $\alpha_0$  racine simple de  $P_0$ . Alors dans le voisinage de  $P_0$  et  $\alpha_0$ , la racine dépend  $C^1$ -ment de  $P$ : Il existe un voisinage de  $P_0$   $U$  de  $\alpha_0$  et  $\varphi: U \rightarrow V$   $C^1$ -difféomorphe tel que  $\alpha = \varphi(P) \Rightarrow P(\alpha) = 0$ .

App 19: les polynômes de degré  $n$  ont au plus  $n$  racines simples sur  $\mathbb{R}$ .

App 20: Étude de  $f(\alpha, p, q) = \alpha^3 + p\alpha + q = 0$ , en  $\alpha$ .

### 3. Différentielle de la fonction implicite

Prop 21: Soit les mêmes hypothèses et notations que le Thm 15, pour  $x \in V_\alpha$ :  
 $d\varphi(x) = -(D\beta(x, \varphi(x)))^{-1} \circ_{\alpha_0} f(x, \varphi(x))$

Ex 22: Pour le cercle de rayon 1 et centre 0, en  $(\alpha, y)$  avec  $y \neq 0$ ,  $\varphi'(x) = -\alpha/y$ .

Ex 23 (Folium de Descartes): Dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 3x^2 - 3xy + y^3 = 0\}$ . On a  $f_y'(\alpha, 0) = 3(\alpha - 0)$ . Si  $f_y'(\alpha, 0) \neq 0$ , le théorème des fonctions implicites donne  $y'(\alpha) = (f_x(\alpha) - 0) / (0 - f_y(\alpha)) = (\alpha^2 - 0) / (\alpha - 0^2)$ . On utilise ces tangentes pour tracer le graphique du folium. Fig 4

App 24: Résolution approchée d'une équation, e.g.:  
 $\alpha^2 + 0,99\alpha - 2,03 = 0$ . On se ramène à  $\alpha^2 + x - c = 0$ , et

on utilise Prop 21 pour approcher le déplacement des solutions.

## III Géométrie différentielle

### 1. Des questions de dimension

Motivation 25: les Thm 3 et 15 sont contreintuitifs sur les dimensions.

Déf 26: Une immersion de classe  $C^k$  de  $U \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^q$  est une application  $C^k$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}^q$  dont la différentielle en tout point est injective.

Une submersion de classe  $C^k$  est de même une application de  $U$  dans  $\mathbb{R}^q$  dont la différentielle en tout point est surjective.

Rmq 27: - Dans le premier cas,  $n \leq q$ , dans le second  $q \geq n$ .  
 - Une application à la fois immersion et submersion est un difféomorphisme local (Thm 3).

Ex 28:  $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$  est une immersion autodiffeo de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$  est submersion autodiffeo de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

Prop 29: A difféomorphisme local près à l'origine, il n'y a qu'une seule immersion de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^q$ : l'injection canonique

Prop 30: A difféomorphisme local près au départ, il n'y a qu'une seule submersion de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^q$ : la projection canonique

[Thm 31 (rang constant)]: Soit  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  de classe  $C^1$  telle que  $\det(Df(x))$  est constant sur  $U$ . Alors si difféomorphisme local près au départ et à l'origine, avec  $r = \text{rg}(Df(x))$ ,  $f$  est l'application linéaire:  
 $A: (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_q) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$

Rmq 32: On résume cela par diagramme (Fig 5).

On peut voir le Thm 9 comme le comportement de  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  qui échoue à être une submersion.

Le Thm 31 invite à "explorer la notion de "paramétrisation": d'où les sous-variétés.

## 2. Sous-variétés

Déf 33 : Une partie  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $p$  si pour tout  $a \in M$ , il existe des voisinages  $U$  et  $V$  de  $a$  et  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un difféomorphisme  $f: V \rightarrow U$  tel que  $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p})$ . On dit aussi que  $M$  est de codimension  $n-p$ .

Ex 34 :

- Fig 6
- Cercles dans  $\mathbb{R}^2$  (dim 1)

- Le cône d'équation  $ax + y - z^2 = 0$  est une sous-variété de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$  si on le privée de  $(0,0,0)$  (où il est "pointu").

Thm 35 (des sous-variétés) : Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . S'équivalent :

- $M$  est une sous-variété de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$
- Pour tout  $a \in M$ , il existe  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  contenant  $a$  et une submersion  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  telle que  $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$
- Pour tout  $a \in M$ , il existe  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  contenant  $a$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  contenant  $0$  et une application  $h: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui est à la fois une immersion de  $V$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un homéomorphisme de  $V$  sur  $U \cap M$ .

d) Pour tout  $a \in M$ , il existe  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  contenant  $a$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$  contenant  $(a_1, \dots, a_p)$  et une application  $G$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}^{n-p}$  telle que, après perturbation éventuelle des coordonnées,  $U \cap M$  soit égal au graphe de  $G$ .

Rmq 36 : • (d)  $\Rightarrow$  (d') est le Thm 15

• (d')  $\Rightarrow$  (b) découle du Thm 3

Ex 37 :  $S^n$ , la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , est une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (submers. :  $\alpha_0^2 + \dots + \alpha_n^2 - 1 = 0$ )

•  $T_{\alpha}^n \{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \mathbb{C}^n / \{B_1^2 + \dots + B_n^2 = 1\}$  est une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{C}^n$  (passer dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et utiliser l'immersion  $h: \mathbb{H}_{1,1} \times \mathbb{H}_{1,1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ )

•  $G_n(\mathbb{R})$  est une sous-variété de dimension  $n(n-1)/2$  de  $\mathbb{R}^n$  (submers.  $f: A \mapsto \text{diag}(A - I_n)$ ).

Déf 38 : Soit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $a \in A$ . On dit que  $v \in \mathbb{R}^n$  est tangent à  $A$  en  $a$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  et  $c: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$

différentiable telle que  $c(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq A$ ,  $c(0) = a$  et  $c'(0) = v$ .

Ex 39 : Soit  $C$  la courbe de  $\mathbb{R}^2$ :  $t \mapsto (t^2, t^3)$ . Le vecteur nul est le seul vecteur tangent à  $C$  en  $(0,0)$

Pré 40 : les vecteurs tangents en un point à une sous-variété de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$  forment un espace vectoriel de dimension  $p$ .

Déf 41 : On nomme espace tangent à  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  en  $a \in A$  et espace vectoriel. On le note  $T_a(A)$ .

Thm 42 : Dans les cas du Thm 35 :

- $T_a(M) = \ker(J_g(a))$
- $T_a(M) = \text{Im}(D_h(a))$
- $T_a(M) = \text{graphe de } J_G(a_1, \dots, a_p)$

## 3. Extrêmes liés

Thm 43 (extrêmes liés) : Soient  $g_1, \dots, g_m$  fonctions  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $C = \{a \in \mathbb{R}^n / g_1(a) = \dots = g_m(a) = 0\}$ . Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $C$ . Soit  $a^* \in C$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f|_C$  admet un extrême local en  $a^*$ , si  $f$  y est différentiable et si  $(dg_1(a^*), \dots, dg_m(a^*))$  est colinéaire, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  tels que  $J_f(a^*) = \lambda_1 dg_1(a^*) + \dots + \lambda_m dg_m(a^*)$

Rmq 44 (interprétation géométrique) : le Thm 43 dit simplement que si  $f|_C$  admet un extrême local sur la sous-variété  $C$ , alors  $J_f(a^*)$  est nulle sur  $T_{a^*}(C)$ .

App 45 : Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée en 3 rebonds. (Fig 7)

App 46 : le Thm 43 donne une condition nécessaire pour être un extrême. On peut évaluer des candidats extrêmes sous cette forme (méthode des multiplicateurs de Lagrange).

App 47 : diagonalisation des endomorphismes symétriques.

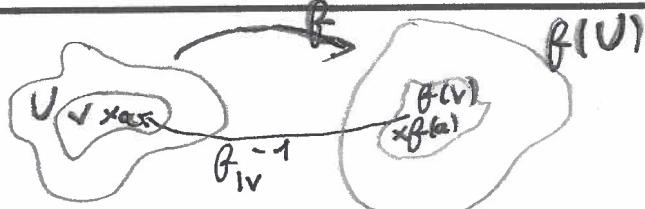


Fig 1: Théorème d'inversion locale

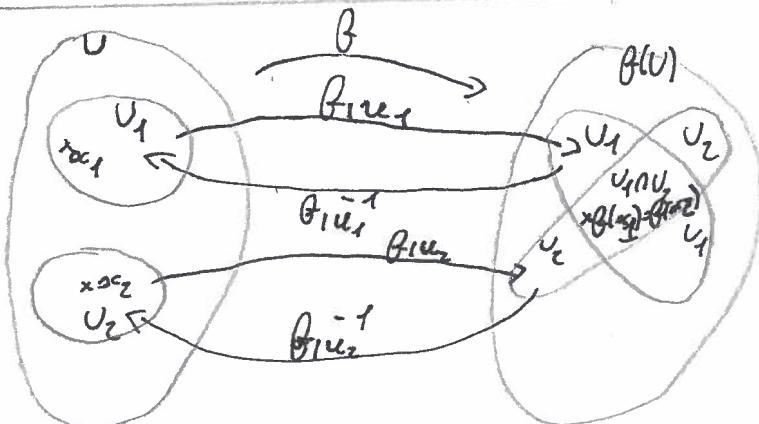


Fig 2: Défaut d'inversion globale

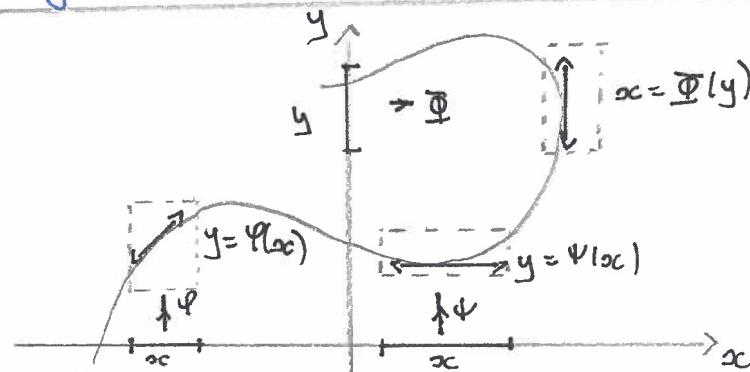


Fig 3: Fonctions implicites

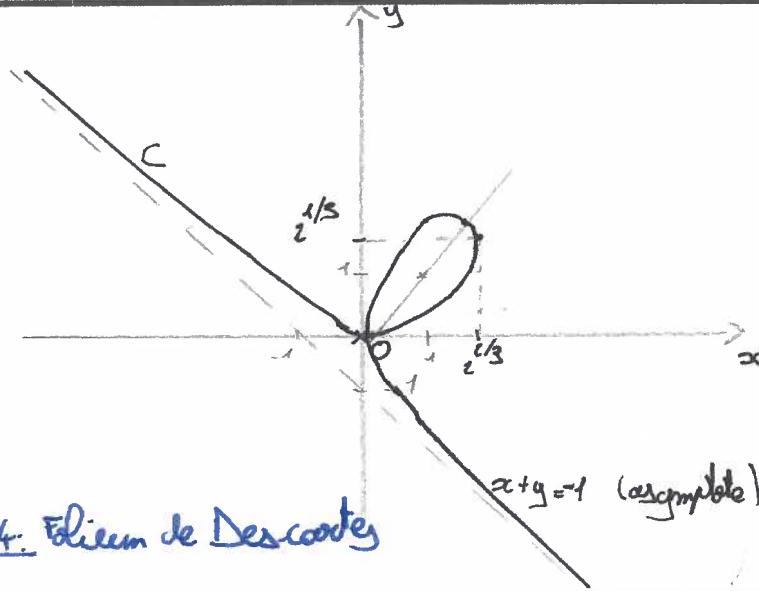


Fig 4: Folium de Descartes

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n &\rightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}^q \\ &\downarrow \\ &y = (x, 0) \in \mathbb{R}^q \quad n \geq q \end{aligned}$$

Fig 5.1: immersion

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n &\rightarrow y = \beta(x) \in \mathbb{R}^q \\ &\downarrow \\ x = (\beta(x), \dots) \in \mathbb{R}^p \quad p \geq q \end{aligned}$$

Fig 5.2: submersion

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n &\rightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}^q \\ &\downarrow \\ x \in \mathbb{R}^n &\rightarrow y = Ax \in \mathbb{R}^q \end{aligned}$$

Fig 5.3: rang constant

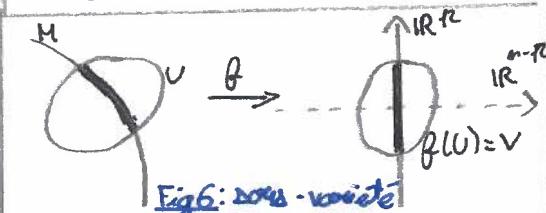


Fig 6: sous-variété



Fig 7: un rebord