Leçon 221 – Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

1 Théorie linéaire

Définition 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Toute EQD sur $\mathbb{K}^n$ du type

$$Y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} A_k(t) Y^{(k)} + B(t)$$

où les A_k sont dans $\mathscr{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$, est appelée **équation différentielle linéaire d'ordre** p. Si $B = 0$, l'équation est dite homogène.
On préfère cependant se ramener à une équation d'ordre 1, via :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{I}_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

Remarque. Désormais, on considérera la formulation suivante :

$$y' = A(t)y + B(t) \qquad (t, y) \in I \times \mathbb{K}^n \quad (\mathcal{P})$$

On va s'intéresser à l'existence et l'unicité d'une solution sur tout I pour $(\mathcal{P})$ lorsque l'on impose une condition $y(t_0) = y_0$ (on dit que c'est un problème de Cauchy).

1.1 Cauchy-Lipschitz, espace des solutions

Théorème 1. Cauchy-Lipschitz linéaire
Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Alors il existe une unique solution $y : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ de $(\mathcal{P})$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Contre-exemple 1. Certaines solutions ne sont pas valables sur tout l'intervalle I. Soit l'équation $xy'(x) = y(x) + x$. On trouve des solutions $x \mapsto x(\ln(x) + A)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $x \mapsto x(\ln(x) + B)$ sur $\mathbb{R}^{-*}$, mais les prolongements ne sont pas dérivables en 0, donc on ne peut pas raccorder les solutions pour en former une sur $\mathbb{R}$ entier. [1]

Définition 2. Considérons une équation du type de 1 à coefficients constant :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(t) \quad (t, y) \in I \times \mathbb{K} \quad (\mathcal{P}_n)$$

Dans ce cas, la matrice A devient une matrice compagnon :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On appelle polynôme caractéristique de $(\mathcal{P}_n)$ le polynôme caractéristique de A, ie

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

On appelle équation caractéristique associée à $(\mathcal{P}_n)$ l'équation $P(X) = 0$

Pour résoudre l'équation, il faut procéder en trois étapes : résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière, et enfin utiliser les conditions imposées pour obtenir l'éventuelle unique solution.

Théorème 2. Considérons l'équation homogène associée :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (t, y) \in I \times \mathbb{K} \quad (\mathcal{P}_{n,H})$$

Notons $(r_1, \cdots, r_p)$ les racines $\mathbb{C}$ de P, de multiplicités respectives $(m_1, \cdots, m_p)$. Les solutions de l'équation homogène forment un $\mathbb{K}$-EV de dimension n, de base la famille $(t \mapsto t^\ell \, \mathbf{e}^{r_k t})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 0 \leqslant \ell \leqslant m_k - 1}}$. Autrement dit, il existe $(\lambda_{j,k})_{j,k}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m_k - 1} \lambda_{k,j} t^{j-1} \right) \mathbf{e}^{r_k t}$$

Application 1. Cas remarquable de l'ordre 2
Soit $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ avec $(a_1, a_0) \in \mathbb{R}^2$ et soit $P(X) = X^2 + a_1 X + a_0$ le polynôme caractéristique associé

1. Si l'équation caractéristique a 2 racines réelles $r_1 \neq r_2$ alors les solutions réelles de $(\mathcal{P}_{2,H})$ sont $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto \mathbf{e}^{r_1 t}, t \mapsto \mathbf{e}^{r_2 t})$
2. Si l'équation caractéristique a une racine double r_1 alors les solutions réelles de $(\mathcal{P}_{2,H})$ sont $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto t\,\mathbf{e}^{r_1 t}, t \mapsto \mathbf{e}^{r_1 t})$
3. Si l'équation caractéristique a 2 racines complexes $r_1 = \rho + i\sigma t$ et $r_2 = \overline{r_1}$ alors les solutions réelles de $(\mathcal{P}_{2,H})$ sont $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto t\,\mathbf{e}^{\rho t}\cos(\sigma t), t \mapsto t\,\mathbf{e}^{\rho t}\sin(\sigma t))$

Exemple 1. Soit l'équation $y'' - 3' - 4y = 0$
Les solutions sont de la forme $y(t) = \lambda\,\mathbf{e}^{-t} + \mu\,\mathbf{e}^{4t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

1. Faire le petit dessin de la page 77 de Oraux X-ENS Analyse 4.

Exemple 2. Résolution par changement de variable

Soit le problème de Cauchy : $\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$.

Si $a \neq 0$, la solution n'est définie que sur $]-1,1[$ par :

$$y(x) = a\sqrt{1-x^2}(1-4x^2) + b\left(x - \frac{4}{3}x^3\right)$$

Si $a = 0$, elle se prolonge à $\mathbb{R}$.

Définition 3. On considère N solutions indépendantes de l'équation homogène
Un système fondamental de solutions est une famille $(y_1, \cdots, y_N)$ de solutions indépendantes de $(\mathcal{P}_{n,H})$, et on appelle $\Phi(t)$ la matrice $(y_1(t) \cdots y_N(t))$ dont les colonnes sont les N solutions, la **matrice fondamentale** du système.

1.2 Variation de la constante

Proposition 1. Une méthode de recherche de solutions particulières
On considère l'équation $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$ de sorte que $Y' = A(t)Y + B(t)$. Considérons y_1, y_2 deux solutions indépendantes de l'équation homogène. Une matrice fondamentale est $\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$, et on pose $Y_0(t) = \Phi(t) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}}_{C(t)}$.

Alors $y(t) = \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t)$ et la résolution revient à : $\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = b \end{cases}$
Ce système est inversible donc on obtient λ', μ' et il reste à intégrer [2]

Exemple 3. Pour $y'' - 2y' + y = \mathbf{e}^t$, on obtient : $C(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{t^2}{2} + \lambda_0 \\ t + \mu_0 \end{pmatrix}$

Exemple 4. Soit l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}$ pour $x \in]0, \pi[$. On trouve :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y(x) = -x\cos(x) + \sin(x)\ln(\sin(x)) + a\cos(x) + b\sin(x)$$

2. C'est là que la méthode a ses limites : trouver une primitive.

2 Exemples de résolutions

2.1 Exponentielle de matrice

Remarque. Sur $\mathbb{C}$, d'après D'Alembert-Gauss, les polynômes sont tous scindés, donc toute matrice est trigonalisable. Les propriétés de l'exponentielle matricielle montrent qu'il suffit de connaître les exponentielles des blocs triangulaires. Il convient alors d'utiliser la décomposition de Dunford pour calculer ces matrices.

Proposition 2. $\forall t \in \mathbb{R} \quad : \quad \dfrac{d}{dt}\mathbf{e}^{tA} = A\,\mathbf{e}^{tA}$

Application 2. Solution d'un système linéaire
On considère le système $X'(t) = AX(t)$. Sa solution X est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad : \quad X(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)A}\,Y(t_0)$$

Théorème 3. Solution du système à second membre
On considère désormais le système $X'(t) = AX(t) + B(t)$. Le problème de Cauchy, donné par le système et la condition $X(t_0) = V_0$ a pour solution :

$$X(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)A}\,V_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{(t-u)A}\,B(u)\,\mathbf{d}u$$

Exemple 5. Soit le système $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$

Les solutions du système sont données par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\alpha}{2}(\mathbf{e}^{3t} + \mathbf{e}^{-t}) + \dfrac{\beta}{2}(\mathbf{e}^{3t} - \mathbf{e}^{-t}) \\ x(t) = \dfrac{\alpha}{2}(\mathbf{e}^{3t} - \mathbf{e}^{-t}) + \dfrac{\beta}{2}(\mathbf{e}^{3t} + \mathbf{e}^{-t}) \end{cases}$

2.2 Application au calcul d'intégrales

Exemple 6. Étude de l'intégrale Gaussienne
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathbf{d}t$, et notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathbf{d}t$

1. f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad f'(x) = -2F'(x)F(x)$

On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exemple 7. Calcul de l'intégrale de Fresnel

Pour $t > 0$, soit la fonction $F : t \mapsto \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{(i-t)x^2} \, \mathbf{d}x$

- Pour tout $t > 0$: F vérifie l'équation différentielle suivante : $2(i-t)F'(t) = F(t)$
- On dispose d'une formule explicite :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad : \quad F(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{1+t^2}}}\, \mathbf{e}^{i\pi/4}\, \mathbf{e}^{-i\arctan(t)/2}$$

Exemple 8. Calcul d'intégrales avec un système d'équations différentielles

Soit $I(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\, \mathbf{d}t$ et $J(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx)\, \mathbf{d}t$. Elles vérifient :

$$\begin{cases} 2(1+x^2)I'(x) + xI(x) = -J(x) \\ 2(1+x^2)J'(x) + xJ(x) = I(x) \end{cases}$$

On obtient $\begin{cases} I(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}} \cos\left(\dfrac{\arctan(x)}{2}\right) \\ J(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}} \sin\left(\dfrac{\arctan(x)}{2}\right) \end{cases}$

2.3 Séries entières, séries de Fourier

Exemple 9. Autour d'arcsin [DVLP]

1. $\forall x \in]-1,1[\, : x \mapsto \arcsin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)4^n} x^{2n+1}$
2. $\forall x \in]-1,1[\, : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Exemple 10. Soit l'équation $(E) : (2x - x^2)y' + (x-1)y - 1 = 0$
Elle admet pour solutions les fonctions du type : $x \mapsto y(x) = C\sqrt{|x(x-2)|}$
La seule fonction solution sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto x - 1$

Exemple 11. On a $|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$
L'équation $y'' + y = |\sin(x)|$ admet une solution particulière donnée par :

$$f : x \mapsto \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$$

Exemple 12. Résolution de l'équation de la chaleur.
Soit $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle, $\mathscr{C}^0_{2\pi}$ et $\mathscr{C}^1_{mor}$
Soit $u : (t,x) \mapsto u(t,x)$ une fonction 2π-périodique en x pour tout $t \geqslant 0$, $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, l'équation : $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$ admet une unique solution :

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, \mathbf{e}^{-n^2 t}\, \mathbf{e}^{inx}}$$

Les a_n provenant de la série de Fourier de u_0 donnée par : $u_0(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, \mathbf{e}^{inx}$

3 Stabilité homogène, analyse spectrale

Définition 4. Stabilité d'une solution.
Soit $\Omega = I \times \Omega'$ où $I \subset \mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Considérons un problème de Cauchy associé à ces notations, de solution maximale y_{t_0,y_0}. Elle sera dite stable si :

1. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y_1 \in \Omega'$ vérifiant $\|y_1 - y_0\| \leqslant \alpha$, la fonction $t \mapsto y_{t_0,y_1}(t)$ est définie pour tout $t \geqslant 0$
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in]0,\alpha]$ tel que pour tout $y_1 \in \Omega'$, si $\|y_1 - y_0\| \leqslant \eta$, alors $\|y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \geqslant t_0$

Théorème 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S l'ensemble des solutions réelles de $X' = AX$

1. $\forall X \in S \quad : \quad \lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad : \quad \Re(\lambda) < 0$
2. Les solutions seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ ssi $t \mapsto \mathbf{e}^{tA}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Cela équivaut à dire que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\Re(\lambda) \leqslant 0$ et pour toute valeur propre λ pour laquelle le sous-espace propre correspondant n'est pas égal au sous-espace caractéristique, on a $\Re(\lambda) < 0$.

Remarque. Pour le cas 1., on parle de stabilité asymptotique.

Références :
- Demailly ; *Analyse numérique et équations différentielles*
- Francinou-Gianella-Nicolas ; *Oraux X-ENS , Analyse 4*
- Francinou-Gianella-Nicolas ; *Oraux X-ENS , Analyse 2*
- Gourdon ; *Les maths en tête : Analyse*
- Berthelin ; *Équations différentielles*