Classification des isométries affines en dimension 3.

Leçon : 161.

Réf : Ladegaillerie p. 185, p. 303

Les théorèmes que je vais utiliser sans les démontrer sont le fait que tout élément de $O(E)$ s'écrit comme le produit d'au plus $\dim E$ réflexions et le thm fondamental de structure : $\forall$ isométrie affine f $\exists!\,(g,t) \in \{$isom. affine à point fixe, translation$\}$ $f = t \circ g = g \circ t$. Si $t = t_{\vec{u}}$ on a alors $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(\vec{g} - \mathrm{Id})$.

Lemme : cf. dévt pour la 106, la 108 et la 160.

Thm : (i) Toute app. orthogonale en dim. 3 est l'identité ou une rotation si elle est directe, une réflexion ou une antirotation si elle est indirecte.

(ii) $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E) = E$, $\mathrm{Ker}(s_H - \mathrm{Id}_E) = H$ plan, $\mathrm{Ker}(\rho_{D,\theta} - \mathrm{Id}_E) = D$ droite, $\mathrm{Ker}(a_{D,\theta} - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$.

(iii) Les isométries affines à point fixe en dimension 3 sont :

- l'identité, dont l'ensemble de points fixes est E ;
- les rotations affines (axe Δ ← droite affine ens. de points fixes, angle θ) ; — déplacements
- les réflexions affines (plan (affine) P ens. de points fixes) ;
- les antirotations affines (centre O ← point ens. de points fixes, axe Δ, angle θ). — antidép.

Thm : Les déplacements en dim. 3 sont l'identité, les rotations et les vissages (cf. dém. pour la déf.), les antidéplacements en dim. 3 sont les réflexions, les antirotations et les symétries glissées.

Dém. du Lemme, des (i) et (ii) du 1er Thm : cf. dévt pour la 106, la 108 et la 160.

Dém. du (iii) du 1er Thm : ok en vectorialisant E grâce à O ($O \in \Delta$ ou P).

Dém. du 2ème Thm : D'après le thm fondamental de structure et le 1er Thm on a $f = g \circ t_u = t_u \circ g$, $u \in \mathrm{Ker}(\vec{g} - \mathrm{Id}_E)$:

- $g = \mathrm{Id}_E$, $u \in E$: $f = \mathrm{Id}_E$ si $u = \vec{0}$, une translation sinon ; ← $\vec{f} = \mathrm{Id}_E$ directe
- $g = s_P$, $u \in \vec{P}$: f est une réflexion si $u = \vec{0}$, une symétrie glissée sinon ; ← $\vec{f} = s_{\vec{P}}$ ind.
- $g = \rho_{D,\theta}$, $u \in \vec{D}$: f est une rotation si $u = \vec{0}$, un vissage sinon ; ← $\vec{f} = \vec{\rho}_{\vec{D},\theta}$ directe
- $g = a_{O,D,\theta}$, $u = \vec{0}$: f est une antirotation. ← $\vec{f} = \vec{a}_{\vec{D},\theta}$ ind.

Classification des applications orthogonales en dimension 3.

Leçons : 106, 108, 160.

Réf : Ladegaillerie p. 185, pp. 166-167

Thm : Toute app. orthogonale en dimension n est produit d'au plus n réflexions. (sym. $\perp$ par rapport à des hyperp.)

Dém : • Soient $x, y \in E$ distincts de même norme. Notons $H = \mathrm{Vect}(x-y)^\perp$ (c'est un hyperplan).

s_H (la symétrie orthogonale par rapport à H) vérifie :

$$\begin{cases} s_H(x) = s_H\left(\frac{\langle x-y, x\rangle}{\|x-y\|^2}(x-y) + x - \frac{\langle x-y,x\rangle}{\|x-y\|^2}(x-y)\right) = \left(1 - 2\frac{\langle x-y,x\rangle}{\|x-y\|^2}\right)x + 2\frac{\langle x-y,x\rangle}{\|x-y\|^2}y \overset{\|x\|=\|y\|}{=} y \\ \perp : \langle x-y, x - \frac{\langle x-y,x\rangle}{\|x-y\|^2}(x-y)\rangle = \langle x-y,x\rangle - \langle x-y,x\rangle\frac{\|x-y\|^2}{\|x-y\|^2} = 0 \text{ ; } \langle x-y,x\rangle = \|x\|^2 - \langle y,x\rangle = \|y\|^2 - \langle y,x\rangle = -\langle x-y,y\rangle \\ \text{De même, } s_H(y) = x. \end{cases}$$

donc : $\langle x-y,x\rangle = \frac{1}{2}\|x-y\|^2$.

• Soit $f \in O(E) \setminus \{Id\}$. Soit $x \in E$ non point fixe de f. Soit $H = \mathrm{Vect}(x - f(x))^\perp$.

Si y est point fixe de f alors $\langle f(y), f(x)\rangle \overset{y \text{ point fixe}}{=} \langle y, f(x)\rangle \overset{f \text{ orthogonale}}{=} \langle y, x\rangle$ donc $y \in H$.

Remarquons que $s_H \circ f \in O(E)$, que x est point fixe de $s_H \circ f$ (avec ce qui précède et $\|f(x)\| = \|x\|$) et que tout point fixe de f est (mais pas de f) point fixe de $s_H \circ f$. Par récurrence, on arrive à n points fixes indépendants (donc à Id) d'où le résultat.

De plus, pour toute réflexion s $s \circ s = Id$.

Lemme : (i) Si H et H' sont deux plans distincts dans $\mathbb{R}^3$ alors $s_H \circ s_{H'}$ fixe $H \cap H'$ et est une rotation sur $(H \cap H')^\perp$, on l'appelle une rotation d'axe $H \cap H'$.

(ii) Si H, H', H'' sont trois plans distincts dans $\mathbb{R}^3$ qui ont une droite commune D alors $s_H \circ s_{H'} \circ s_{H''}$ est une réflexion.

(iii) Si H, H', H'' sont trois plans distincts dans $\mathbb{R}^3$ qui n'ont pas de droite commune alors $s_H \circ s_{H'} \circ s_{H''}$ est le produit d'une rotation et de la réflexion de plan orthogonal à l'axe D de cette rotation ; on l'appelle une antirotation d'axe D.

Plus tôt dans le plan, déf. de directe et ind. et fait qu'une réflexion est ind.

Thm : Toute app. orthogonale en dimension 3 est l'identité ou une rotation si elle est directe, une réflexion ou une antirotation si elle est indirecte.

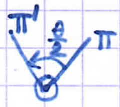
<u>Dém. du thm grâce au Lemme et au Thm précédent :</u> on a tout fait, et prod. impair de réflexions : indirecte. prod. pair de réflexions : directe.

<u>Dém. du Lemme :</u> (i) $\forall x \in H \cap H'$ $s_H(s_{H'}(x)) \overset{x \in H'}{=} s_H(x) \overset{x \in H}{=} x$. $s_{H|(H\cap H')^\perp} \circ s_{H'|(H \cap H')^\perp}$ ($s_{H'}$ fixe $(H\cap H')^\perp$ car son adjoint, qui est son inverse, fixe $H \cap H'$) est un produit de réflexions d'un plan donc une rotation de ce plan.

(ii) D'après (i), $s_H \circ s_{H'} = \rho_{D,\theta}$; $\forall x \in D$ $\rho_{D,\theta}(s_{H''}(x)) = \rho_{D,\theta}(x) = x$ et $\rho_{D,\theta|D^\perp} \circ s_{H''|D^\perp}$ est une réflexion de $D^\perp$ donc : $\exists$ une base (e_1, e_2) de $D^\perp$ telle que $\rho_{D,\theta} \circ s_{H''|\mathrm{Vect}(e_1)} = Id$ et $\rho_{D,\theta} \circ s_{H''|\mathrm{Vect}(e_2)} = -Id$;

on a la réflexion $s_{\mathrm{Vect}(D, e_1)}$ (D : d'un vecteur non nul de D).

(iii) Notons $D = H \cap H'$. $\exists \theta \in \mathbb{R}$ $s_H \circ s_{H'} = \rho_{D,\theta}$. Si $D = H''^{\perp}$, on a fini.



Sinon : soit Π le plan contenant D et $H''^{\perp}$. Posons $\Pi' = \rho_{D,\frac{\theta}{2}}(\Pi)$.

$\rho_{D,\theta} = s_{\Pi'} \circ s_{\Pi}$ donc $s_H \circ s_{H'} \circ s_{H''} = s_{\Pi'} \circ \underbrace{s_{\Pi} \circ s_{H''}}_{\text{rotation d'axe } \Delta := \Pi \cap H'' \text{ et d'angle } \pi \text{ (car } H''^{\perp} \subset \Pi)}$.

Si $\Delta = \Pi'^{\perp}$, on a fini. Sinon :

soit P le plan contenant Δ et $\Pi'^{\perp}$; soit P' le plan contenant Δ et $P^{\perp}$.

$s_{P'} \circ s_P$ est la rotation d'axe $P \cap P' = \Delta$ et d'angle π (car $P^{\perp} \subset P'$) donc :

$s_{P'} \circ s_P = s_{\Pi} \circ s_{H''}$ donc $s_H \circ s_{H'} \circ s_{H''} = \underbrace{s_{\Pi'} \circ s_{P'}}_{\text{rotation d'axe } \Pi' \cap P' = P^{\perp} \text{ (car } P^{\perp} \subset P' \text{ par déf. et } P^{\perp} \subset \Pi' \text{ car } \Pi'^{\perp} \subset P)} \circ s_P$, on a fini.