

Classification des applications orthogonales en dimension 3.



Leçons: 106, 108, 160.

Ref: Zadegallerie p. 185, pp. 166-167

Thm: Toute app. orthogonale en dimension n est produit d'au plus n réflexions. → sym. ⊥ par: 2 des hyperp.

Dém: Soient $x, y \in E$ distincts de même norme. Notons $H = \text{Vect}(x-y)^\perp$ (c'est un hyperplan).

S_H (la symétrie orthogonale par rapport à H) vérifie:

$$S_H(x) = S_H\left(\frac{\langle x-y, x \rangle}{\|x-y\|^2}(x-y) + x - \frac{\langle x-y, x \rangle}{\|x-y\|^2}(x-y)\right) = (1-2\frac{\langle x-y, x \rangle}{\|x-y\|^2})x + 2\frac{\langle x-y, x \rangle}{\|x-y\|^2}y = y$$

$\|x\| = \|y\|$
 $\langle x-y, x \rangle = \|x\|^2 - \langle y, x \rangle$
 $= \|x\|^2 - \langle y, x \rangle$
 $= -\langle x-y, y \rangle$
 donc: $= \frac{1}{2}\|x-y\|^2$

De même, $S_H(y) = x$.

Soit $f \in O(E) \setminus \{Id\}$. Soit $x \in E$ non point fixe de f . Soit $H = \text{Vect}(x-f(x))^\perp$.

Si y est point fixe de f alors $\langle f(y), f(x) \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \langle y, x \rangle$ donc $y \in H$. y point fixe, f orthogonale

Remarquons que $S_H \circ f \in O(E)$, que x est point fixe de $S_H \circ f$ et que tout point fixe de f est point fixe de $S_H \circ f$. Par récurrence, on arrive à n points fixes indépendants d'où le résultat. avec ce qui précède et $\|f(x)\| = \|x\|$ (mais pas de f)
donc à Id

De plus, pour toute réflexion S $S \circ S = Id$.

Lemme: (i) Si H, H' sont deux plans distincts dans \mathbb{R}^3 alors $S_H \circ S_{H'}$ fixe $H \cap H'$ et est une rotation sur $(H \cap H')^\perp$; on l'appelle une rotation d'axe $H \cap H'$.

(ii) Si H, H', H'' sont trois plans distincts dans \mathbb{R}^3 qui ont une droite commune D alors $S_H \circ S_{H'} \circ S_{H''}$ est une réflexion.

(iii) Si H, H', H'' sont trois plans distincts dans \mathbb{R}^3 qui n'ont pas de droite commune alors $S_H \circ S_{H'} \circ S_{H''}$ est le produit d'une rotation et de la réflexion de plan orthogonal à l'axe de cette rotation; on l'appelle une antirotation d'axe D .

Plus tôt dans le plan, def. de directe et ind. et fait qu'une réflexion est ind.

Thm: Toute app. orthogonale en dimension 3 est l'identité ou une rotation si elle est directe, une réflexion ou une antirotation si elle est indirecte.

Dém. du thm grâce au Lemme et au Thm précédent: on a tout fait, et prod. \circ impair de réflexions: indirecte. \rightarrow pair de réflexions: directe.

Dém. du Lemme: (i) $\forall x \in H \cap H'$ $S_H(S_{H'}(x)) = S_H(x) = x$. $S_H|_{(H \cap H')^\perp} \circ S_{H'}|_{(H \cap H')^\perp}$ est une rotation d'axe $H \cap H'$ car son adjoint, qui est $S_{H'} \circ S_H$, fixe $H \cap H'$.

est un produit de réflexions d'un plan donc une rotation de ce plan.

(ii) D'après (i), $S_H \circ S_{H'} = \rho_{D, \theta}$; $\forall \rho_{D, \theta} \circ S_{H''}(x) = \rho_{D, \theta}(x) = x$ et $\rho_{D, \theta} \circ S_{H''}|_{D^\perp}$ est une réflexion de D^\perp donc: \exists une base (e_1, e_2) de D^\perp telle que $\rho_{D, \theta} \circ S_{H''}|_{\text{Vect}(e_1)} = Id$ et $\rho_{D, \theta} \circ S_{H''}|_{\text{Vect}(e_2)} = -Id$ on a la réflexion $S_{\text{Vect}(D, e_2)}$ selon vecteur normal de D

(ii) Notons $D = H \cap H'$. $\exists \theta \in \mathbb{R}$ $\Delta_H \circ \Delta_{H'} = \rho_{D, \theta}$. Si $D = H''^\perp$, on a fini.

Si non: soit Π le plan contenant D et H''^\perp . Alors $\Pi' = \rho_{D, \frac{\theta}{2}}(\Pi)$.



$$\rho_{D, \theta} = \Delta_\Pi \circ \Delta_{\Pi'} \text{ donc } \Delta_H \circ \Delta_{H'} \circ \Delta_{H''} = \Delta_\Pi \circ \Delta_{\Pi'} \circ \Delta_{H''}.$$

Si $\Delta = \Pi''^\perp$, on a fini. Si non:

rotation d'axe $\Delta := \Pi \cap H''$ et d'angle π (car $H''^\perp \subset \Pi$)

soit P le plan contenant Δ et Π'^\perp ; soit P' le plan contenant Δ et P^\perp .

$\Delta_P \circ \Delta_{P'}$ est la rotation d'axe $P \cap P' = \Delta$ et d'angle π (car $P^\perp \subset P'$) donc:

$$\Delta_P \circ \Delta_{P'} = \Delta_\Pi \circ \Delta_{H''} \text{ donc } \Delta_H \circ \Delta_{H'} \circ \Delta_{H''} = \Delta_\Pi \circ \Delta_P \circ \Delta_{P'}, \text{ on a fini.}$$

rotation d'axe $\Pi' \cap P' = P^\perp$ (car $P^\perp \subset P'$ par def. et $P^\perp \subset \Pi'$ car $\Pi'^\perp \subset P$).

Classification des isométries affines en dimension 3.



Leçon: 161.

Réf: Lodegallerie p. 185, p. 303

Les théorèmes que je vais utiliser sans les démontrer sont le fait que tout élément de $O(E)$ s'écrit comme le produit d'au plus $\dim E$ réflexions et le thm fondamental de structure: \forall isométrie affine f

$\exists ! (g, t) \in \{\text{isom. affine à point fixe, translation}\} f = t \circ g = g \circ t$. Si $t = t_{\vec{u}}$ on a alors $\vec{u} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) = \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id})$.

Remarque: cf. dév. pour la 106, la 108 et la 160.

Thm: (i) Toute app. orthogonale en dim. 3 est l'identité ou une rotation si elle est directe, une réflexion ou une antirotation si elle est indirecte.

(ii) $\text{Ker}(\text{Id}_E - \text{Id}_E) = E$, $\text{Ker}(\Delta_H - \text{Id}_E) = H$ plan, $\text{Ker}(\rho_{O, \theta} - \text{Id}_E) = D$ droite, $\text{Ker}(\alpha_{O, \theta} - \text{Id}_E) = \{O\}$.

(iii) Les isométries affines à point fixe en dimension 3 sont:

- l'identité, dont l'ensemble de points fixes est E ;
- les rotations affines (axe Δ ens. de points fixes, angle θ); ↗ déplacements
- les réflexions affines (plan (affine) P ens. de points fixes); ↘ antidépl.
- les antirotations affines (centre O ens. de points fixes, axe Δ , angle θ).

Thm: Les déplacements en dim. 3 sont l'identité, les rotations et les vissages (cf. dem. pour la 106), les antidéplacements en dim. 3 sont les réflexions, les antirotations et les symétries glissées.

Dém. du Lemme, des (i) et (ii) du 1^{er} Thm: cf. dév. pour la 106, la 108 et la 160.

Dém. du (iii) du 1^{er} Thm: ok en vectorialisant E grâce à O ($O \in \Delta$ ou P).

Dém. du 2^{ème} Thm: D'après le thm fondamental de structure et le 1^{er} Thm on a $f = g \circ t_u = t_u \circ g$, $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$.

- $g = \text{Id}_E$, $u \in E$: $f = \text{Id}_E$ si $u = \vec{0}$, une translation sinon; ← $\vec{f} = \text{Id}_E$ directe
- $g = \Delta_P$, $u \in \vec{P}$: f est une réflexion si $u = \vec{0}$, une symétrie glissée sinon; ← $\vec{f} = \Delta_P$ ind.
- $g = \rho_{O, \theta}$, $u \in \vec{D}$: f est une rotation si $u = \vec{0}$, un vissage sinon; ← $\vec{f} = \rho_{O, \theta}$ directe
- $g = \alpha_{O, \theta}$, $u = \vec{0}$: f est une antirotation. ← $\vec{f} = \alpha_{O, \theta}$ ind.