La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

Leçons : 205, 207, 208, 250.

Réf : Candelpergher pp. 369-374.

mettre ça avant dans le plan (on a même $\hat\varphi\in L^p(\mathbb R)$ pour $p\geq 1$)

Lemme : Soit $\varphi\in \mathcal D(\mathbb R)=\mathcal C_c^\infty(\mathbb R)$. $\hat\varphi\in L^2(\mathbb R)$ et $\|\hat\varphi\|_2=\|\varphi\|_2$.

Thm : Soient $f\in L^2(\mathbb R)$ et $(\varphi_n)\in \mathcal D(\mathbb R)^{\mathbb N}$ telles que $\|\varphi_n-f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. (Existe tjs par densité de $\mathcal D(\mathbb R)$ dans $L^2(\mathbb R)$).

(i) $\hat\varphi_n$ tend vers une limite que l'on notera $\mathcal F(f)\in L^2(\mathbb R)$ et qui ne dépend pas du choix de (φ_n).

(ii) $\mathcal F : L^2(\mathbb R)\to L^2(\mathbb R)$ est linéaire continue et telle que : $\forall f\in L^2(\mathbb R)$ $\|\mathcal F(f)\|_2=\|f\|_2$.

(iii) $\forall f,g\in L^2(\mathbb R)$ $\int_{\mathbb R}\mathcal F(f)g=\int_{\mathbb R} f\,\mathcal F(g)$.

(iv) Si $f\in L^1(\mathbb R)\cap L^2(\mathbb R)$ alors $\hat f=\mathcal F(f)$ presque partout.

Dém. du Lemme : Posons $\psi:\begin{cases}\mathbb R\to\mathbb C\\ \xi\mapsto \overline{\hat\varphi(\xi)}\end{cases}$. D'après des items du plan, $\psi\in L^1(\mathbb R)$ et :

$$\|\hat\varphi\|_2^2=\int_{\mathbb R}\hat\varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi=\int_{\mathbb R}\varphi(\xi)\underbrace{\hat\psi(\xi)}_{\overline{\varphi(\xi)}\text{ par inversion de Fourier (dans le plan)}}d\xi=\|\varphi\|_2^2.$$

Dém. du Thm : (i) $L^2(\mathbb R)$ est complet donc ISMQ $(\hat\varphi_n)$ est de Cauchy pour avoir une limite $\mathcal F(f)\in L^2(\mathbb R)$.

D'après le Lemme, $\forall p,q\in\mathbb N$ $\|\hat\varphi_p-\hat\varphi_q\|_2=\|\widehat{\varphi_p-\varphi_q}\|_2=\|\varphi_p-\varphi_q\|_2$ et (φ_n) est de Cauchy car cv donc $(\hat\varphi_n)$ est de Cauchy.

Soit $(\psi_n)\in \mathcal D(\mathbb R)^{\mathbb N}$ telle que $\|\psi_n-f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

$$\|\hat\varphi_n-\hat\psi_n\|_2=\|\widehat{\varphi_n-\psi_n}\|_2\underset{\text{Lemme}}{=}\|\varphi_n-\psi_n\|_2\leq\|\varphi_n-f\|_2+\|f-\psi_n\|_2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

donc le $\mathcal F(f)$ pour (ψ_n) est bien le même $\mathcal F(f)$ que pour (φ_n).

(ii) La linéarité découle de celle de $\varphi\mapsto\hat\varphi$.

Le lemme donne : $\|\mathcal F(f)\|_2=\lim\limits_{n\to+\infty}\|\hat\varphi_n\|_2=\lim\limits_{n\to+\infty}\|\varphi_n\|_2=\|f\|_2$.

On en déduit la continuité (et l'injectivité) de $\mathcal F$.

(iii) $\int_{\mathbb R}\mathcal F(f)g=\langle\bar g,\mathcal F(f)\rangle=\lim\limits_{n\to+\infty}\langle\bar\psi_n,\mathcal F(\varphi_n)\rangle$ par C^0 du $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (où $\varphi_n,\psi_n\in\mathcal D(\mathbb R)$, $\varphi_n\to f$, $\psi_n\to g$).

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\langle\bar\varphi_n,\mathcal F(\psi_n)\rangle$

$=\langle\bar f,\mathcal F(g)\rangle$

$=\int_{\mathbb R} f\,\mathcal F(g)$.

(iv) Soit $f\in L^1(\mathbb R)\cap L^2(\mathbb R)$. Soit $n\in\mathbb N^*$. Soit $\varphi\in\mathcal D(]-n,n[)$. $\mathcal F(\varphi)=\hat\varphi$ (prendre $\forall k\in\mathbb N$ $\varphi_k=\varphi$).

$$\int_{-n}^{n}\varphi\,\mathcal F(f)=\int_{\mathbb R}\varphi\,\mathcal F(f)\underset{(iii)}{=}\int_{\mathbb R}\mathcal F(\varphi)f=\int_{\mathbb R}\hat\varphi f\underset{\substack{\text{un item du plan}\\ \text{(csq de Fubini)}}}{=}\int_{\mathbb R}\varphi\hat f=\int_{-n}^{n}\varphi\hat f.$$

Par densité de $\mathcal D(]-n,n[)$ dans $L^2(]-n,n[)$ on a donc : $\forall g\in L^2(]-n,n[)$ $\int_{-n}^{n} g\,(\mathcal F(f)-\hat f)=0$.

En prenant $g = \overline{\mathcal{F}(f) - \hat{f}}$ (ok car $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ continue, donc les deux sont dans $\mathcal{L}^2(]-n,n[)$) on a :

$\int_{-n}^{n} |\mathcal{F}(f) - \hat{f}|^2 = 0$ donc : $\exists N_n \in \mathcal{B}(]-n,n[)$ $\lambda(N_n) = 0$ et : $\forall x \in]-n,n[\setminus N_n$ $\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x)$.

$\underset{n \in \mathbb{N}^*}{\bigcup} N_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est de mesure nulle et . $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\bigcup} N_n$ $\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x)$.

← dénombrable