Nombre de zéros d'une équa. diff..

Leçons : 220, 221, 224.

Réf : Queffélec-Zuily ch. Equations différentielles §VI.2.

Thm : Soient $a\in\mathbb{R}$ et $q\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[)$, (**) telles que $\int_a^{+\infty}\sqrt{q(u)}\,du=+\infty$ et $q'(x)=\underset{+\infty}{o}(q^{3/2}(x))$.
← existe par Cauchy-Lipschitz

Soit $y\in\mathcal{C}^2([a,+\infty[,\mathbb{R})$ solution de $y''+qy=0$. Notons, pour tout $x\in[a,+\infty[$ $N(x)$ le nombre de zéros de y sur $[a,x]$. $N(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\pi}\int_a^x\sqrt{q(u)}\,du$.

à mettre avant ↑ **Lemme :** Soient $a\in\mathbb{R}$, $y_1,y_2\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ sans zéro commun. $\exists r,\theta\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$

$$y_1+iy_2=re^{i\theta} \text{ i.e. } y_1=r\cos\theta,\ y_2=r\sin\theta.$$

__Dém. du Lemme :__ Posons $r:\begin{cases}[a,+\infty[\to\mathbb{R}_+^*\\ t\mapsto\sqrt{y_1(t)^2+y_2(t)^2}\end{cases}$. r est $\mathcal{C}^1$ car ($\neq 0$ car →) y_1 et y_2 n'ont pas de zéro en commun.

On veut $\theta\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que, en posant $z=\frac{y_1+iy_2}{r}$, $\frac{z'}{z}=i\theta'$ et $z(a)=e^{i\theta(a)}$; ← $(ze^{-i\theta})'=z'e^{-i\theta}-zi\theta'e^{-i\theta}$

soit θ_a tel que $z(a)=e^{i\theta_a}$ et $\theta:\begin{cases}[a,+\infty[\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\theta_a-i\int_a^t\frac{z'}{z}\end{cases}$. $\theta\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et vérifie : $y_1+iy_2=re^{i\theta}$.

__Dém. du Thm :__ Posons $\tau:\begin{cases}[a,+\infty[\to\mathbb{R}_+\\ x\mapsto\int_a^x\sqrt{q(u)}\,du\end{cases}$. $\tau(a)=0$, $\tau\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$, τ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $\sqrt{q}>0$

donc τ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Posons $Y=y\circ\tau^{-1}$.

$\forall x>a$ $y'(x)=Y'(\tau(x))\sqrt{q(x)}$ et $y''(x)=Y''(\tau(x))q(x)+Y'(\tau(x))\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}$.

$\forall x>0$ $q(\tau^{-1}(x))Y''(x)+\frac{q'(\tau^{-1}(x))}{2\sqrt{q(\tau^{-1}(x))}}Y'(x)+q(\tau^{-1}(x))Y(x)=0$

ie $Y''(x)+\underbrace{\frac{q'(\tau^{-1}(x))}{2\,q(\tau^{-1}(x))^{3/2}}}_{\varphi(x)\text{ qui se prolonge par }\mathcal{C}^0\text{ en }0}Y'(x)+Y(x)=0.$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, Y et Y' n'ont pas de zéro commun (car $Y\underset{\text{fonction}}{\neq 0}$ car $y\neq 0$)

donc, par le lemme, $\exists r,\theta\in\mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ $Y'=r\cos\theta$, $Y=r\sin\theta$. On a :

$$\begin{cases}(1)\ r\cos\theta=(r\sin\theta)'=r'\sin\theta+r\theta'\cos\theta\\ (2)\ (r\cos\theta)'=-\varphi r\cos\theta-r\sin\theta \text{ ie } r'\cos\theta-r\theta'\sin\theta=-\varphi r\cos\theta-r\sin\theta\end{cases}$$

(1)$\times\cos\theta-$(2)$\times\sin\theta$: $r\theta'=r+\varphi r\cos\theta\sin\theta$ d'où $\theta'=1+\varphi\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\varphi\sin(2\theta)$

donc : $\forall t>0$ $|\theta'(t)-1|\le\frac{1}{2}|\varphi(t)|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc $\theta'(t)\underset{+\infty}{\sim}1$ donc $\theta(t)\underset{+\infty}{\sim}t$.

Posons $M(t)$ le nombre de zéros de Y sur $[0,t]$. Montrons que $M(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{t}{\pi}$.
← $<+\infty$ car sinon les zéros de Y dans $[0,t]$ auraient un point d'accumulation u et : $Y(u)=0$ et $Y'(u)=0$: non !

Soit $t_0\in\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall t\ge t_0$ $\theta'(t)>0$ (existe car $\theta'(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}1$).
← $M(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$ car $\theta(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$ et θ $\mathcal{C}^0$

$M(t)\underset{+\infty}{\sim}|\{u\in[t_0,t],\ \sin(\theta(u))=0\}|=|\{v\in[\theta(t_0),\theta(t)],\ \sin(v)=0\}|$ (car $\theta'>0$ sur $[t_0,t]$ et θ $\mathcal{C}^0$)

$\underset{+\infty}{\sim}|\{k\in\mathbb{Z},\ 0\le k\le\frac{\theta(t)}{\pi}\}|\underset{+\infty}{\sim}\frac{\theta(t)}{\pi}\underset{+\infty}{\sim}\frac{t}{\pi}$.

$Y(\tau(s))$

Or $M(\tau(x))=|\{t\in[0,\tau(x)],\ Y(t)=0\}|=|\{s\in[a,x],\ y(s)=0\}|=N(x)$ (car $\tau'>0$ et τ $\mathcal{C}^0$)

donc $N(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\pi}\int_a^x\sqrt{q(u)}\,du$ (cf. déf. de τ).

Ex. de fonctions vérifiant les hypothèses du théorème :

on ne sait pas résoudre en général

- $q : t \mapsto t^{\lambda}$ avec $\lambda > -2$, $a = 1$;
- $q : t \mapsto t^{4\alpha} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2}$ avec $\alpha \geqslant 0$, $a = 1 + (\alpha(\alpha+1))^{\frac{1}{4\alpha+2}}$.

$f : t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}} \cos\left(\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right)$ est solution.