Complétude de la méthode de résolution

Réf : Stern : Fondements mathématiques de l'informatique ?

La méthode de résolution pour un ensemble $\mathcal{F}$ de formules closes :

1) On met chaque formule en forme prénexe
2) On skolemise ces formules
3) On distribue les quantificateurs

On a maintenant un ensemble de clauses, que l'on note $\{C_1, \dots, C_n\}$. On renomme les variables pour que $\forall i \neq j$, $Var(C_i) \cap Var(C_j) = \emptyset$.

Déf. (Règle de résolution). Soient C, C_1, C_2 trois clauses. On dit que C est une résolvante de C_1 et C_2 s'il existe $S_1 \subset C_1$ et $S_2 \subset C_2$ deux ensembles de littéraux tels que :

(i) S_1 et $\neg S_2$ sont unifiable par σ mgu
(ii) $C = ((C_1 \setminus S_1) \cup (C_2 \setminus S_2))\sigma$

Un arbre de résolution est un arbre dont les feuilles sont étiquetées par des clauses de Σ, et chaque noeud a deux fils dont il est une résolvante.
Si la racine de l'arbre est la clause vide $\square$, alors on dit que l'arbre est un arbre de réfutation.

Déf : (Modèle de Herbrand). Réalisation de L de domaine H tq :

(i) H est l'ensemble de tous les termes clos de L
(ii) Chaque constante est interprétée par elle même et les fonctions aussi
(iii) À chaque formule atomique close on associe une variable de Herbrand $p[R(t_1, \dots, t_n)]$.

On associe alors à la distribution de vérité σ le modèle de Herbrand $\mathcal{H}(\sigma)$ en interprétant R par $R^{\mathcal{H}(\sigma)} = \{(t_1, \dots, t_n) \mid \sigma(p[R(t_1, \dots, t_n)]) = 1\}$

Déf : À toute formule du calcul prop F sur les vars de Herbrand, on associe une formule close sans quantificateurs $\phi(F)$ par induction en partant de $\phi(p[R(t_1, \dots, t_n)]) = R(t_1, \dots, t_n)$

Déf : (Particularisation). Soit F une formule close. On appelle particularisation de F toute formule qui s'écrit $F(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$, où les t_i sont des termes clos.

Th : (Herbrand "propositionnel") Soit Σ un ensemble de formules closes universelles. Alors soit il existe un modèle de Herbrand qui satisfait Σ, soit il existe un ensemble fini de particularisation de formules de Σ qui est contradictoire.

Démo
- On remplace chaque formule de Σ par l'ensemble de ses interprétations. On obtient ainsi un ensemble Σ' de formules closes. Par ϕ, cette ensemble provient d'un ensemble de formule propositionnelle $\Sigma' = \{\phi(F) \mid F \in \Sigma_0\}$
- S'il existe σ qui satisfait Σ_0, alors le modèle de Herbrand $\mathcal{H}(\sigma)$ satisfait toutes les formules de Σ' et donc Σ
- Si Σ_0 est contradictoire, par compacité du calcul prop, il existe un sous-ensemble Σ_0' fini de Σ_0 qui est contradictoire

□

Th : (Complétude) Soit Σ un ensemble de clauses contradictoire. Alors il existe un arbre de réfutation de Σ.

Démo
- On note de même Σ' l'ensemble des particularisation de Σ. Par le théorème de Herbrand, Σ' est contradictoire et donc par ϕ, on obtient un ensemble de formules propositionnelles contradictoire.
- On a donc un arbre de réfutation au sens propositionnel qui réfute Σ' (par complétude de la résolution pour le calcul prop) et on va remplacer chaque noeud c de l'arbre par une clause C dont il est une particularisation. Pour les feuilles, la construction est évidente. Pour les noeuds interne, on prouve ce lemme.
- Lemme : (de relèvement) Soient C_1, C_2 des clauses au sens calcul des prédicats et c_1, c_2 deux clauses prop qui sont des particularisations. Alors, pour toute résolvante c de c_1 et c_2, il existe une clause C résolvante de C_1 et C_2 dont c est une particularisation.

Dém :
- $Var(C_1) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Var(C_2) = \{y_1, \dots, y_p\}$
- c_1, c_2 particularisation $\Rightarrow \exists t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_p$ tq $c_1 = C_1[\tau]$, $c_2 = C_2[\tau]$, où $\tau = (x_1/t_1, \dots, y_p/t'_p)$
- Soit u le littéral qui intervient dans la coupure de c_1 et c_2. On définit S_1 (resp S_2) comme l'ensemble L des littéraux de C_1 (resp C_2) tq $L\tau$ conduise à u (resp $\bar{u}$).

  Alors $S_1 \cup \neg S_2$ est unifiable par τ. On choisit un mgu σ : on a $\tau = \sigma\theta$
- c est obtenue par l'action de τ sur $((C_1 \setminus S_1) \cup (C_2 \setminus S_2))$, càd par l'action de θ sur la résolvante de C_1 et C_2 : $C = ((C_1 \setminus S_1) \cup (C_2 \setminus S_2))\sigma$.
  d'où c est la particularisation de C via $x/x\theta$.

□

□