Inegalité de LE CAM

November 13, 2019

Théorème (LE CAM) :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que $0 < \lambda < n$, alors pour $X_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$ on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leq 4\frac{\lambda^2}{n}$$

Démonstration du théorème :

<u>Plan de la démonstration :</u>

1. On definit une loi m_p sur $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ dont la première loi marginale suit $\mathscr{P}(p)$ et la deuxième suit $\mathscr{B}(1,p)$.
2. On montre que $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq 2p^2$ (avec $p = \frac{\lambda}{n}$).
3. On montre que pour 2 vad X et Y dans $\mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$
4. On montre l'inégtalité : $|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq 2\frac{\lambda^2}{n}$
5. On definit ensuite l'ensemble $A := \{k \in \mathbb{N} | \mathbb{P}(X_n = k) \geq \mathbb{P}(Y = k)\}$ puis on applique 3) puis 2) sur une famille de n couples de vad $(X_i, Y_i) \sim m_{\frac{\lambda}{n}}$.

<u>La démo en elle même :</u>

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que $0 < \lambda < n$. On pose $p = \frac{\lambda}{n} \in]0,1[$ et on définit une sur loi sur $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ de la façon suivante:

   on dira que $(X,Y) \sim m_p$ si :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=0, Y=0) = e^{-p} - p\left(1 - e^{-p}\right) && \mathbb{P}(X=1, Y=0) = 0 \\
&\mathbb{P}(X=0, Y=1) = p\left(1 - e^{-p}\right) && \mathbb{P}(X=1, Y=1) = pe^{-p}
\end{aligned}$$

   $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=k, Y=1) = 0 \\
&\mathbb{P}(X=k, Y=0) = \frac{p^k}{k!}e^{-p}
\end{aligned}$$

   Verifions d'abord que m_p définit bien une loi sur $\mathbb{N} \times \{0,1\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{1} \mathbb{P}(X=k, Y=j) &= e^{-p} + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{j=0}^{1} \mathbb{P}(X=k, Y=j) + p \quad e^{-p} \\
&= e^{-p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} e^{-p} \\
&= e^{-p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} \\
&= 1
\end{aligned}$$

   En regardant les loi marginales, on constate que $X \sim \mathscr{P}(p)$ et que $Y \sim \mathscr{B}(1,p)$.

2. Calculons dans ce cadre $\mathbb{P}(X=Y)$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=Y) &= \mathbb{P}(X=Y=0)+(X=Y=1)\\ &= e^{-p}-p\left(1-e^{-p}\right)+pe^{-p}\\ &= e^{-p}(1+2p)-p\\ &\geq (1-p)(1+2p)-p\\ &\geq 1-p^2\end{aligned}$$

d' où $\mathbb{P}(X\neq Y)\leq 2p^2$.

3. Soit X et Y, deux variables aléatoire discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit $A\subset\mathbb{N}$, alors on a :

$\mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}(X\in A, X=Y)+\mathbb{P}(X\in A, X\neq Y)\leq \mathbb{P}(Y\in A)+\mathbb{P}(X\neq Y)$

de même $\mathbb{P}(Y\in A)\leq \mathbb{P}(X\in A)+\mathbb{P}(X\neq Y)$ d'où

$$|\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|\leq \mathbb{P}(X\neq Y)$$

4. Soit $(X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n)$ n couples de variables aléatoires i.i.d. de loi $m_{\frac{\lambda}{n}}$. Posons $Y=Y_1+...+Y_n$ et $X=X_1+...+X_n$. Ainsi $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$ et $Y\sim\mathscr{B}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$. Soit $A\subset\mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)| &\leq \mathbb{P}(X\neq Y)\\ &\leq \mathbb{P}(\exists i\in[\![1,n]\!]\,|X_i\neq Y_i)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2\\ &\leq 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2\end{aligned}$$

5. Soit $A:=\{k\in\mathbb{N}|\mathbb{P}(X=k)\geq\mathbb{P}(Y=k)\}$ et $B=\mathbb{N}\backslash A$, $\{A,B\}$ forment un S.C.E. , ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| &= \sum_{k\in A}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)|+\sum_{k\in B}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)|\\ &= \sum_{k\in A}P(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)+\sum_{k\in B}P(Y=k)-\mathbb{P}(X=k)\\ &= \mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)+\mathbb{P}(Y\in B)-\mathbb{P}(X\in B)\\ &\leq 2\frac{\lambda^2}{n}+2\frac{\lambda^2}{n}\\ &\leq 4\frac{\lambda^2}{n}\end{aligned}$$

□

Références :

[GK] Garet & Kurtzmann, De l'intégration aux probabilités, Ellipses , version 1 (2011)- version 2 (2019)
leçons possibles : 264
Paul Bakouche prépa agreg Toulouse