Lien Γ-B, formule des compléments et prolongement de Γ.

Leçon : 207, 236, 265.

Réf. : sans réf. ; contenu dans Rombaldi.

Thm : (i) $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$ $\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$.

(ii) $\forall x\in\,]0,1[$ $B(x,1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

(iii) (formule des compléments) $\forall x\in\,]0,1[$ $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

(après) Ex : Γ se prolonge en une fonction holomorphe qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})=\{y\in\mathbb{C},-y\notin\mathbb{N}\}$ avec des pôles simples en les $-n$, $n\in\mathbb{N}$, de résidu $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

<u>Dém</u> : (i) $\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2x-1}du\int_0^{+\infty}e^{-v^2}v^{2y-1}dv$ (chgt de var $t=u^2$, $t=v^2$)

$=4\int_{]0,+\infty[^2}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}du\,dv$ (Fubini-Tonelli)

$=4\int_{]0,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}]}\lambda^{2x+2y-1}e^{-\lambda^2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\lambda\,d\theta$ (chgt de var polaire $u=\cos\theta\times\lambda$, $v=\lambda\sin\theta$)

$=2\Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta$ (Fubini-Tonelli et chgt de var $t=\lambda^2$)

or $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((\cos\theta)^2)^{x-1}((\sin\theta)^2)^{y-1}2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ (chgt de var $t=(\cos\theta)^2$)

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta$

donc $\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$.

(ii) Remarquons que $\phi(x):=B(x,1-x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt$

$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{-x+2}du$ (chgt de var $t=\frac{u}{1+u}$, $u=\frac{t}{1-t}$; $dt=\frac{1+u-u}{(1+u)^2}du=\frac{1}{(1+u)^2}du$)

$=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{1+u}du$.

En part., si $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ vérifie $2m+1\leq 2n$ on a $\phi\left(\frac{2m+1}{2n}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{2m+1-2n+2n-1}}{1+t^{2n}}2n\,dt$ ($u=t^{2n}$, $du=2nt^{2n-1}dt$)

$=2n\int_0^{+\infty}\frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}dt$.

De plus, ϕ est continue sur $]0,1[$ ($x\mapsto\frac{u^{x-1}}{1+u}$ est continue sur $]0,1[$ et $\forall a\in\,]0,1[$ $\forall x\in[a,1[$ $\forall u\in\mathbb{R}_+^*$ $\frac{|u|^{x-1}}{1+u}\leq\frac{1}{u^{1-a}+u^2}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$ ($\sim\frac{1}{u^{1-a}}$ en 0 et $\sim\frac{1}{u^2}$ en $+\infty$; thm de C^0 des $\int$ à param.)

tout comme $x\mapsto\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, donc ISMQ $\phi\left(\frac{2m+1}{2n}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\pi\frac{2m+1}{2n}\right)}$ (on a la densité des $\frac{2m+1}{2n}\cap\,]0,1[$ dans $]0,1[$ car tout $x\in\,]0,1[$ s'écrit $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^N\frac{\varepsilon_k}{2^k}$, $\varepsilon_k\in\{0,1\}$, $=\frac{2^{N-1}\varepsilon_1+\dots+2\varepsilon_{N-1}+1}{2^N}$ impair / pair)

$\phi\left(\frac{2m+1}{2n}\right)=n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}dt=-2n\pi\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^k\right)^{2m+1-2n}}{2n}\right)$ (cf. lemme mis après la preuve et R_1)

$=\pi\,\mathrm{Im}\left(e^{i\pi\left(\frac{2m+1}{2n}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}(2m+1)}\right)^k\right)$

$=\pi\,\mathrm{Im}\left(e^{i\pi\left(\frac{2m+1}{2n}\right)}\frac{1-e^{i\pi(2m+1)}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}(2m+1)}}\right)$

$=\pi\,\mathrm{Im}\left(i\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right)}\right)$

$=\dfrac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right)}$.

(iii) Immédiat d'après (i), (ii) et $\Gamma(1)=1$.

$\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=[-e^{-t}]_0^{+\infty}=1$

Lemme : ① $\forall (a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \quad \int_{-M}^{M} \frac{dt}{t-(a+ib)} \xrightarrow[M\to+\infty]{} \text{signe}(b)\, i\pi.$

② Soit $F\in\mathbb{R}(X)$ de degré $\leqslant -2$ et sans pôle réel. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les résidus aux pôles de $\mathcal{I}m>0$ de F.

$$\int_{-M}^{M} F(t)\,dt \xrightarrow[M\to+\infty]{} -2\pi\, \mathcal{I}m\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\Big).$$

<u>Dém du Lemme :</u> ①
$$\int_{-M}^{M}\frac{dt}{t-(a+ib)} = \int_{-M}^{M}\frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,dt + i\int_{-M}^{M}\frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(M-a)^2+b^2}{(M+a)^2+b^2}\Big) + i\int_{-M}^{M}\frac{1}{1+\left(\frac{t-a}{b}\right)^2}\frac{1}{b}\,dt$$
$$= \quad '' \quad + i\int_{\frac{-M-a}{b}}^{\frac{M-a}{b}}\frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= \quad '' \quad + i\Big(\arctan\Big(\frac{M-a}{b}\Big) - \arctan\Big(\frac{-M-a}{b}\Big)\Big)$$
$$\xrightarrow[M\to+\infty]{} \text{signe}(b)\, i\pi.$$

② <u>Rq :</u> Si $F=\frac{P}{Q}$ avec $P\wedge Q=1$ et si λ est un pôle simple de F alors $\text{Res}(F,\lambda)=\frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}$.

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{t-(a_k+i\underbrace{b_k}_{>0})} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{\lambda_k}}{t-(a_k-ib_k)} + \sum_{\dots}\frac{\text{cste}\dots}{(t-(a_\cdot+ib_\cdot))^{\ell_\cdot}}{}_{\geqslant 2}$$

Or : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, $\forall \ell\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ $\displaystyle\int_{-M}^{M}\frac{1}{(t-(a+ib))^{\ell}} = \frac{1}{1-\ell}\Big(\frac{1}{(M-(a+ib))^{\ell-1}} - \frac{1}{(-M-(a+ib))^{\ell-1}}\Big)\xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$

donc, avec ①, $\displaystyle\int_{-M}^{M}F(t)\,dt \xrightarrow[M\to+\infty]{} i\pi\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - \sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda_k}\Big) = -2\pi\,\mathcal{I}m\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\Big).$

<u>Dém. du Th. :</u> Sur $\{z\in\mathbb{C},\ Re(z)>0\}$ $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt$. (Δ)

On a montré que : $\forall x\in\,]0,1[\quad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$. (□)

Ainsi, par le principe du prolongement analytique, $\forall z\in\mathbb{C}\ 0<Re(z)<1 \Rightarrow \underbrace{\Gamma(z)}_{\frac{\Gamma(z+1)}{z}}\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\neq 0.$

↳ $\forall z\in\mathbb{C}\ 0<Re(z)<1\Rightarrow\Gamma(z)\neq 0$ (*)

Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Posons $z_n=\frac{1}{n}+ix$ avec $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

Par continuité $\frac{\Gamma(1+ix)}{ix}\Gamma(1-ix)=\frac{\pi}{\sin(\pi i x)}\neq 0.$

Ainsi : $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\ Re(z)=1\Rightarrow\Gamma(z)\neq 0$. Or $\Gamma(1)=1\neq 0$ donc, avec (*) :

$\forall z\in\mathbb{C}\ 0<Re(z)\leqslant 1\Rightarrow\Gamma(z)\neq 0.$

Avec la formule $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ on en déduit : $\forall z\in\mathbb{C}\ Re(z)>0\Rightarrow\Gamma(z)\neq 0.$

Ainsi, $\frac{\pi}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)}$ est holomorphe sur $\Omega=\{z\in\mathbb{C},\ Re(z)<1,\ -z\notin\mathbb{N}\}$ (car $Re(1-z)>0$ ssi $Re(z)<1$)

donc, d'après (□), (Δ), principe du prol. analytique, Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$.

Par le principe du prol. analytique, Γ vérifie encore : $\forall z\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})\ \Gamma(z)z=\Gamma(z+1)$

donc Γ ne s'annule jamais. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z\in D(-n,1)$ (ouvert) $(z+n)\Gamma(z)=\frac{\pi(z+n)}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)}=\frac{(-1)^n\pi(z+n)}{\Gamma(1-z)\sin(\pi(z+n))}\xrightarrow[z\to -n]{}\frac{(-1)^n}{n!}.$