

2.9 Racines de l'Identité

Théorème : On note $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^* : M^p = I_n\}$.

Son adhérence est l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \text{Sp}(M) \subset \mathcal{C}(0, 1)\}$

Lemme : $M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Sp}(M) \subset \mu_p(\mathbb{C})$

Démonstration : (Peut être zappé à l'oral)

\Rightarrow : $X^p - 1$ est scindé à racines simples (les racines p -ièmes), et annule M , donc M est diagonalisable

\Leftarrow : Si M est diagonalisable et $\text{Sp}(M) \subset \mu_p(\mathbb{C})$, alors M est annulé par un polynôme scindé simple, dont les racines sont dans $\mu_p(\mathbb{C})$, et alors $M^p = I_n$, et donc $M \in \mathcal{A}$.

Démonstration : On procède en deux grandes étapes

1) Étudions le cas $n = 1$ (soit pour deviner le résultat, soit parce qu'on en aura besoin après...)

Dans ce cas, $\mathcal{M}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(\mathbb{C})$. Montrons que $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(0, 1)$

Soit l'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}(0, 1) \\ t \longmapsto e^{it} \end{array} \right.$ (c'est une surjection continue).

$\pi\mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} et $\mathcal{A} = f(\pi\mathbb{Q})$ ce qui entraîne $\overline{\mathcal{A}} = \overline{f(\pi\mathbb{Q})} \stackrel{(*)}{=} f(\overline{\pi\mathbb{Q}}) = f(\mathbb{R}) \stackrel{\text{surj}}{=} \mathcal{C}(0, 1)$

Il faut quand même dire un mot sur la preuve de $(*)$ qui n'est pas si triviale que ça...

$$\mathcal{C}(0, 1) = f(\overline{\pi\mathbb{Q}}) \underbrace{\subset}_{\mathcal{C}^0} \overline{f(\pi\mathbb{Q})} \subset \overline{\mathcal{C}(0, 1)} \underbrace{=}_{\text{fermé}} \mathcal{C}(0, 1)$$

Donc en fait, il y a égalité partout dans les inclusions, ce qui prouve bien le résultat.

2) Cas général

- On a $\mathcal{A} \subset F$

- Montrons que $F \subset \overline{\mathcal{A}}$. Soit $M \in F$. Par trigonalisation, $M = P^{-1}TP$ où $(P, T) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \times \Delta_{n,+}(\mathbb{C})$

L'ensemble \mathcal{A} est stable par conjugaison donc il suffit de prouver que $T \in \overline{\mathcal{A}}$.

Pour cela, on va procéder par analyse-synthèse.

Si $(T_p)_p \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ converge vers T , alors par continuité, $(P^{-1}T_pP)_p$ converge vers M , et les $P^{-1}T_pP$ sont toutes dans \mathcal{A} . Notons $T = (t_{i,j})_{i,j}$. Les $t_{i,i}$ sont tous de module 1.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère $\left(t_{k,k}^{(p)}\right)_p$ avec $t_{k,k}^{(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} t_{k,k}$, et où les $t_{k,k}^{(p)}$ sont des racines de l'unité.

(Notons que l'existence d'une telle suite découle du cas $n = 1$)

On considère alors la matrice T_p , dont les termes sont ceux de T sauf les diagonaux, qui sont les $t_{k,k}^{(p)}$

On a : $T_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} T$. Il faut donc s'arranger pour que $T_p \in \mathcal{A}$. Pour cela, il suffit que l'une des puissances de

T_p soit I_n (d'après la définition des $t_{k,k}^{(p)}$, ceci est automatique), et que T_p soit diagonalisable.

Pour cela, il suffit que les coefficients diagonaux de T_p soient 2 à 2 distincts.

Pour $1 \leq k \leq n$, considérons $\theta_k \in \mathbb{R}$ tel que $t_{k,k} = e^{i\theta_k}$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_{k,k}^{(p)} = e^{2i\pi\mu_k^{(p)}}$ où

$$\mu_k^{(p)} = \frac{k}{p} + \frac{1}{p} \text{Ent}_- \left[\frac{p\theta_k}{2\pi} \right].$$

L'idée est d'avoir un $\mu_k^{(p)}$ proche de θ_k pour p assez grand. Naturellement, on voudrait poser $\mu_k^{(p)} = \frac{k}{p} + \theta_k$,

mais rien ne garantit $\theta_k \in \mathbb{Q}$, et alors les $t_{k,k}^{(p)}$ ne sont plus des racines de l'unité !

Il vient alors par l'IAF :

$$\left| e^{2i\pi\mu_k^{(p)}} - e^{i\theta_k} \right| \leq \left| 2\pi\mu_k^{(p)} - \theta_k \right| \leq \left| 2\pi \frac{k}{p} + \frac{2\pi}{p} \text{Ent}_- \left[\frac{p\theta_k}{2\pi} \right] - \theta_k \right| \underbrace{\leq}_{\text{Ent}_-[x] \leq 1+x} \frac{2\pi(k+1)}{p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

Ceci montre que $t_{k,k}^{(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} t_{k,k}$ pour tout k . Vérifions que ces T_p conviennent.

Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $k \neq \ell$, et distinguons les cas.

$$\hookrightarrow \text{Si } \theta_k \equiv \theta_\ell \pmod{2\pi} \text{ alors } 2\pi\mu_k^{(p)} - 2\pi\mu_\ell^{(p)} \equiv \frac{2\pi(k-\ell)}{p} \pmod{2\pi}$$

$$\hookrightarrow \text{Si } \theta_k \not\equiv \theta_\ell \pmod{2\pi} \text{ alors } 2\pi\mu_k^{(p)} - 2\pi\mu_\ell^{(p)} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \theta_k - \theta_\ell$$

Ainsi les coefficients diagonaux de T_p sont bien 2 à 2 distincts pour p assez grand.

- Montrons que F est fermé.

Soit $(M_p)_p \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on note $\lambda_{1,p}, \dots, \lambda_{n,p}$ les valeurs propres de M_p comptées avec multiplicité, sans ordre particulier.

On a : $\chi_M = \lim_{p \rightarrow +\infty} \chi_{M_p}$ (continuité : les coefficients d'un χ_M dépendent polynomialement des $m_{i,j}$)

De plus, la suite $(\lambda_{1,p}, \dots, \lambda_{n,p})_p \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$ est bornée (module 1), donc par le corollaire complexe de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\lambda_{1,\varphi(p)}, \dots, \lambda_{n,\varphi(p)})$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\chi_{M_{\varphi(p)}} = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_{i,\varphi(p)})$ et par $p \rightarrow +\infty$: $\chi_M = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$

Ainsi, $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et pour tout $1 \leq i \leq n$: $|\lambda_i| = \lim_{p \rightarrow +\infty} |\lambda_{i,\varphi(p)}| = 1$

Donc les valeurs propres de M sont bien sur le cercle unité, et par conséquent, F est fermé.

Référence :

- Francinou-Gianella-Nicolas ; *Oraux X-ENS, Algèbre 2* ; page 221