

# $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

Mohamed NASSIRI

## Référence :

Cours d'algèbre, Daniel Perrin - p.163-164

## Recasage :

- 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
- 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.
- 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.
- 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

## Résumé :

C'est un développement très intéressant et qui se recasent dans beaucoup de leçons ! Il s'agit d'un isomorphisme remarquable entre  $SO_3(\mathbb{R})$  et les quaternions. Il faut le comprendre dans le sens suivant : toute rotation de  $\mathbb{R}^3$  peut-être vue comme un quaternion de norme 1.

## Prérequis :

Groupe orthogonal euclidien et ses générateurs - Quaternions et ses propriétés (conjugué, norme, quaternions purs ...)

---

**Théorème :** Soit  $G$  le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

*Démonstration.* L'idée est de faire agir  $G$  sur le corps des quaternions  $\mathbb{H}$  par automorphisme intérieur. Pourquoi ? Tout simplement parce que  $\mathbb{H}$  n'est pas commutatif donc cette action n'est pas triviale et on va donc tenter de tirer un maximum d'informations sur cette simple action.

Etape 1 : Atterrir dans  $GL_4(\mathbb{R})$

Pour  $g \in G$  et  $q \in \mathbb{H}$ , on pose

$$S_g(q) = gqg^{-1} = gq\bar{g}$$

(car  $g \in G$  donc  $1 = N(g) = g\bar{g} \Rightarrow g^{-1} = \bar{g}$ ). Ainsi, l'application  $S_g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire et bijective avec  $(S_g)^{-1} = S_{g^{-1}} = S_{\bar{g}}$ . En effet,

$$q' = S_g(q) \Leftrightarrow q' = gqg^{-1} \Leftrightarrow g^{-1}q'g = q \Leftrightarrow g^{-1}q'(g^{-1})^{-1} = q \Leftrightarrow S_{g^{-1}}(q') = q$$

On obtient donc une application

$$S : G \rightarrow \text{GL}_4(\mathbb{R}) \\ g \mapsto S_g$$

En effet, il ne faut pas oublier que l'on peut réaliser les quaternions comme un sous-ensemble de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . Donc il est tout à fait naturel de voir apparaître  $\text{GL}_4(\mathbb{R})$ .

Etape 2 : En fait dans  $O_4(\mathbb{R})$

$S$  est manifestement un morphisme et son noyau est

$$\text{Ker}S = Z(\mathbb{H}) \cap G = \mathbb{R} \cap G = \{-1, 1\}$$

De plus,

$$\forall a \in \mathbb{R} (= Z(\mathbb{H})), S_g(a) = gag^{-1} \underset{a \in Z(\mathbb{H})}{=} agg^{-1} = a \Rightarrow S_{g|_{\mathbb{R}}} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$$

Par ailleurs,  $S_g$  conserve la norme. En effet,

$$\forall q \in \mathbb{H}, N(S_g(q)) = S_g(q)\overline{S_g(q)} = gq\bar{g}\overline{gq\bar{g}} = gq\bar{g}\bar{g}q = gN(q)\bar{g} \underset{N(q) \in \mathbb{R}}{=} g\bar{g}N(q) = N(q)$$

Donc  $S_g \in O(N) \approx O_4(\mathbb{R})$

Etape 3 : Puis dans  $O_3(\mathbb{R})$

On y est presque! Mais on est dans  $O_4(\mathbb{R})$ , pas dans  $O_3(\mathbb{R})$ . Pour régler ce problème, on va se restreindre à l'ensemble des quaternions purs qui a la bonne propriété d'être un sous-espace de dimension 3 de  $\mathbb{H}$ .

On remarque que  $\mathfrak{P} = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = -q\}$  est stable par  $S_g$  (i.e.)  $S_g(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}$ . En effet,

$$\forall q \in \mathfrak{P}, \overline{S_g(q)} = \overline{gq\bar{g}} = g\bar{q}\bar{g} = -gq\bar{g} = -S_g(q)$$

On pose alors

$$s_g = S_{g|_{\mathfrak{P}}}$$

. On obtient donc  $s_g \in O(N|_{\mathfrak{P}}) \approx O_3(\mathbb{R})$  et  $s : G \rightarrow O_3(\mathbb{R})$  avec  $\text{kern} s = \{-1, 1\}$ .

Etape 4 : Pour enfin arriver dans  $SO_3(\mathbb{R})$  ...

Maintenant il faut réussir à montrer que l'espace d'arrivée est  $SO_3(\mathbb{R})$  tout entier!

On munit  $O_3(\mathbb{R})$  de sa topologie naturelle (en fait, il suffit de voir  $O_3(\mathbb{R})$  comme un sous-espace de  $M_3(\mathbb{R})$  et on identifie ce dernier à  $\mathbb{R}^9$ ). On pourra donc parler "continuité".

Les applications

$$\det : O_3(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad s : G \rightarrow O_3(\mathbb{R})$$

sont continues. Par suite,

$$\det \circ s : G \rightarrow \{-1, 1\}$$

est continue.

Par ailleurs,  $G$  est connexe puisque  $G = \{q \in \mathbb{H} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$  est isomorphe à  $\mathbb{S}^3$  (et la sphère  $\mathbb{S}^3$  est connexe).

Comme l'image d'un connexe par une application continue est connexe,

$$\det \circ s(G) \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ ou } O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R})$$

car ce sont les deux composantes connexes de  $O_3(\mathbb{R})$ . Mais comme  $s(1) = \text{Id} \in SO_3(\mathbb{R})$  et  $1 \in G$ , nécessairement

$$s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$$

Etape 5 : ... tout entier !

Pour terminer la preuve, il ne nous reste plus qu'à montrer que  $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$ . Comme  $SO_3(\mathbb{R})$  est engendré par les renversements, il suffit de montrer que l'on atteint tous les renversements. Allons-y !

Soit  $p \in \mathfrak{P} \cap G$ ,

$$s_p(p) = p \underbrace{p\bar{p}}_{=1} = p$$

donc  $s_p$  est une rotation d'axe  $(p)$ .

Mais

$$(s_p)^2 = s_{p^2} = s_{pp} \underbrace{=}_{p \in \mathfrak{P}} s_{-p\bar{p}} \underbrace{=}_{p \in G} s_{-1} = \text{Id}$$

Ainsi  $s_p$  est une involution et donc un renversement d'axe  $(p)$ . On obtient ainsi tous les renversements de  $SO_3(\mathbb{R})$ . Par suite, comme  $\mathfrak{P} \cap G \subset G$ , on a

$$s(\mathfrak{P} \cap G) \subset s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$$

$$\longleftarrow \quad \quad \quad \longrightarrow$$

$$\boxed{=}$$

Donc  $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$ . Finalement, par le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

□

*"Je me promenais avec Lady Hamilton sur le pont Brougham [Dublin] et cette dernière me parlait de pensées personnelles d'une très profonde signification [...]. Quand soudainement le circuit galvanic de la pensée se ferma et les équations principales des quaternions se présentèrent à moi exactement comme je les utilise encore maintenant..."*

Découverte des relations quaternioniques,  
en 1843, racontés dans les mémoires  
de Sir William Rowan Hamilton.

### Remarques :

- **Représentations matricielles des quaternions**

Réprésentation comme une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  :

On fait opérer  $\mathbb{H}$  sur lui-même par multiplication. Pour  $q, q' \in \mathbb{H}$ , on pose

$$\begin{aligned} T_q : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q' &\mapsto qq' \end{aligned}$$

L'application  $T_q$  est manifestement linéaire et si  $q = a + bi + cj + dk$ , la matrice de  $T_q$  dans la base  $(1, i, j, k)$  s'écrit

$$\begin{matrix} & T_q(1) & T_q(i) & T_q(j) & T_q(k) \\ \begin{matrix} 1 \\ i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} & & & \end{matrix} \quad (\dagger)$$

Si l'on note  $M(q)$  la matrice associée au quaternion  $q$ , alors  $M(q)$  est la matrice dans la base  $(1, i, j, k)$  de la multiplication à gauche par  $q$ . En composant les applications linéaires, on a donc le résultat suivant : si  $q_1$  et  $q_2$  sont deux quaternions, et  $M(q_1)$ ,  $M(q_2)$  les matrices associées, alors  $M(q_1)M(q_2)$  est la matrice de la composée des deux applications linéaires *multiplication à gauche par  $q_2$  et multiplication à gauche par  $q_1$* , c'est-à-dire l'application *multiplication à gauche par  $q_1q_2$* . En fait, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{H} &\rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ q = a + bi + cj + dk &\mapsto M(q) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbre de  $\mathbb{H}$  sur la sous-algèbre de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  des matrices de la forme  $(\dagger)$ .

De plus, on a

$$1_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Réprésentation comme une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  :

On remarque que l'on peut plonger le corps  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{H}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{H} \\ a + bi &\mapsto a + bi + 0j + 0k \end{aligned}$$

(on pourrait aussi faire  $a + bi \mapsto a + 0i + bj + 0k$  ou encore  $a + bi \mapsto a + 0i + 0j + bk$ , mais par commodité de notation, on a préféré celui-là. Attention ! Le  $i$  dans  $\mathbb{C}$  est *a priori* différent du  $i$  dans  $\mathbb{H}$  ...)

Ainsi,  $\mathbb{H}$  est un  $\mathbb{C}$ -e.v. pour la loi  $(\lambda, q) \mapsto q\lambda$   $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $q \in \mathbb{H}$  (le sens de la multiplication est important !)

Une base de  $\mathbb{H}$  sur  $\mathbb{C}$  est alors  $(i, j)$  et si  $q = a + bi + cj + dk$ , alors on a

$$q = 1 \underbrace{(a + bi)}_{:=\lambda \in \mathbb{C}} + j \underbrace{(c - di)}_{:=\mu \in \mathbb{C}}$$

Grâce à la précaution prise sur le sens de la multiplication, l'application  $T_q$ , qui est  $\mathbb{R}$ -linéaire, est aussi  $\mathbb{C}$ -linéaire. La matrice de  $T_q$  dans la base  $(1, j)$  s'écrit

$$1 \begin{pmatrix} T_q(1) & T_q(i) \\ \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, on a un isomorphisme

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$q = 1 \underbrace{(a + bi)}_{:=\lambda \in \mathbb{C}} + j \underbrace{(c - di)}_{:=\mu \in \mathbb{C}} \mapsto M(q) = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

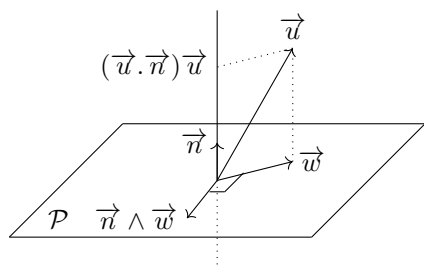
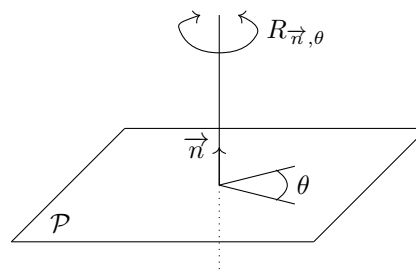
De plus, on a

$$1_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

- **Formules de rotation d'Olinde Rodrigues** Ce qui permet de faire explicitement le lien entre les quaternions et les rotations dans l'espace sont les formules de rotation d'Olinde Rodrigues.

On rappelle qu'une rotation vectorielle  $R_{\vec{n}, \theta}$ , dans l'espace euclidien orienté de dimension 3, est caractérisée par :

- un vecteur unitaire  $\vec{n}$ , qui détermine son axe de rotation, et
- son angle  $\theta$ , celui de la rotation vectorielle plane associée, restriction de cette rotation au plan  $\mathcal{P}$ , orthogonal à l'axe.



Soit  $\vec{u}$  un vecteur de l'espace. Il se décompose en la somme de  $(\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n}$ , colinéaire à  $\vec{n}$  (et invariant par la rotation), et de  $\vec{w} = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} \in \mathcal{P}$  (qui va subir une rotation dans ce plan).

Le vecteur directement orthogonal à  $\vec{w}$  dans le plan (et de même norme) est  $\vec{n} \wedge \vec{w}$ , de sorte que l'image de  $\vec{w}$  dans la rotation d'angle  $\theta$  est  $(\cos \theta) \vec{w} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{w}$ .

Ainsi,  $\vec{v}$ , l'image de  $\vec{u}$  par la rotation  $R_{\vec{n}, \theta}$  est

$$\vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\cos \theta) \vec{w} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{w}$$

Or,  $\vec{w} = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n}$ , d'où finalement la formule de rotation de Rodrigues :

$$\vec{v} = (\cos \theta) \vec{u} + (1 - \cos \theta) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{u} \quad (\dagger\dagger)$$

Bon! On a fait moitié du chemin!

On a vu que l'ensemble des quaternions purs,  $\mathfrak{P} = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = -q\}$ , est un sous-espace de dimension 3 de  $\mathbb{H}$ . Plus précisément, muni de la base  $(i, j, k)$ ,  $\mathfrak{P}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . Sous cet isomorphisme, un vecteur  $\vec{v} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$  est identifié au quaternion imaginaire pur  $bi + cj + dk \in \mathfrak{P}$  et on peut s'autoriser à noter le quaternion  $q = a + bi + cj + dk$  comme  $q = a + \vec{v}$ . On appelle  $a$  la *partie scalaire* de  $q$  et  $\vec{v}$  sa *partie vectorielle*.

Le *produit de Hamilton* (c'est-à-dire le produit de quaternions) de  $q_1 = a_1 + \vec{v}_1$  et  $q_2 = a_2 + \vec{v}_2$  est alors donné par :

$$q_1 q_2 = (a_1 + \vec{v}_1)(a_2 + \vec{v}_2) = a + \vec{v}$$

avec

$$a = a_1 a_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2.$$

En particulier, en prenant  $a_1 = a_2 = 0$ , le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  peuvent être "récupérés" respectivement comme la partie scalaire (au signe près) et la partie vectorielle de leur produit de Hamilton. On peut donc définir la règle de *multiplication de deux vecteurs* comme suit

$$\vec{v} \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$$

On déduit directement du produit de Hamilton que l'inverse (à gauche et à droite) d'un quaternion non nul est

$$(a + \vec{v})^{-1} = \frac{1}{a^2 + |\vec{v}|^2} a - \vec{v}$$

En particulier, l'inverse d'un quaternion unitaire (tel que  $a^2 + |\vec{v}|^2 = 1$ ) s'obtient simplement en changeant le signe de ses coordonnées imaginaires (*i.e*)  $(a + \vec{v})^{-1} = a - \vec{v}$ .

Nous sommes (enfin !) armés pour parler "rotation" ...

Définissons le quaternion (unitaire)  $q = \cos(\alpha/2) + \vec{u} \sin(\alpha/2)$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire et  $\alpha \in [0, 2\pi[$ . Soit  $\vec{v}$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$ , alors

$$\vec{v}^{\curvearrowright} = q \vec{v} q^{-1} = \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \vec{v} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

renvoie le vecteur  $\vec{v}$  tourné d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe dirigé par  $\vec{u}$ . En effet,

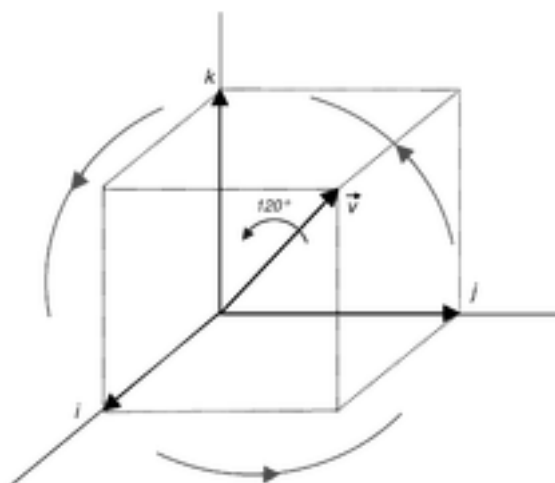
$$\begin{aligned} \vec{v}^{\curvearrowright} &= q \vec{v} q^{-1} \\ &= \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \vec{v} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \vec{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \vec{v} \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) + (\vec{u} \vec{v} - \vec{u} \vec{v}) \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \vec{u} \vec{v} \vec{u} \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \vec{v} \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) + 2(\vec{u} \wedge \vec{v}) \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) - (\vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - 2\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v})) \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \vec{v} \left( \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \left( 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v}) \left( 2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) \\ &= \vec{v} \cos \alpha + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \sin \alpha + \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v})(1 - \cos \alpha) \\ &= (\vec{v} - \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v})) \cos \alpha + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \sin \alpha + \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule de rotation de Rodrigues (††) !

Illustrons tout ça avec un exemple !

Considérons la rotation  $f$  autour de l'axe dirigé par  $\vec{v} = i + j + k$  et d'angle  $\alpha = 2\pi/3$ . On considère le quaternion unitaire

$$\begin{aligned} q &= \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{v} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{i + j + k}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + i + j + k}{2} \end{aligned}$$



Une rotation de  $120^\circ$  autour de la première diagonale permute  $i, j$  et  $k$  circulairement.

Ainsi, si on prend un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$  que l'on note  $\vec{w} = ai + bj + ck$ , la rotation  $\mathcal{R}$  d'angle  $\alpha$  et d'axe dirigé par le vecteur  $\vec{v}$  appliqué à  $\vec{w}$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(ai + bj + ck) &= q(ai + bj + ck)q^{-1} \\ &= \frac{1 + i + j + k}{2} (ai + bj + ck) \frac{1 - i - j - k}{2} \\ &= \text{après de très très très longues lignes calculs...} (*) \\ &= ci + aj + bk \end{aligned}$$

Comme on s'y attendait, la rotation revient donc à permuter  $i, j$  et  $k$  circulairement.

(\*) Les calculs sont fastidieux à faire à la main, mais dans un programme d'ordinateur, on appelle seulement deux fois la routine de multiplication de quaternions.

- **Sur la continuité de  $s : G \rightarrow O_3(\mathbb{R})$ .** Matriciellement, dans la base  $(i, j, k)$ , on obtient (en notant  $g = a + bi + cj + dk$  avec  $g \in G$ ) :

$$\begin{matrix} & s_g(i) & s_g(j) & s_g(k) \\ \begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(dc - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

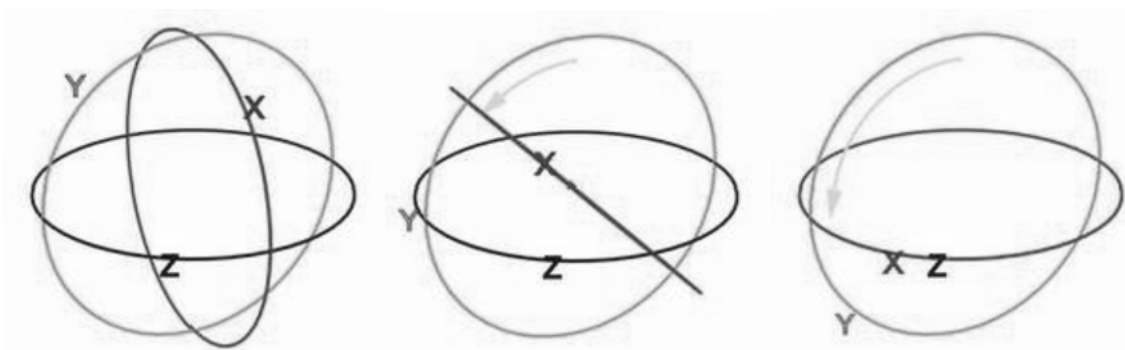
On voit donc que les coefficients de la matrice sont des fonctions polynômiales en  $a, b, c$  et  $d$ . Donc, on peut affirmer que l'application  $s : G \rightarrow O_3(\mathbb{R})$  est continue *en les coefficients de la matrice*.

Par ailleurs, nous venons d'écrire la matrice orthogonale correspondant à une rotation au moyen du quaternion unitaire  $g = a + bi + cj + dk$ .

- **Applications**

L'intérêt de cet isomorphisme est le suivant : les quaternions unitaires fournissent une représentation de la rotation d'objets en trois dimensions. Comparés aux angles d'Euler, ils sont plus simples à composer et évitent le problème du *blocage de cardan*. Comparés aux matrices de rotations, ils sont plus stables numériquement et peuvent se révéler plus efficaces. En effet, quand on compose plusieurs rotations sur un ordinateur, les erreurs d'arrondi s'accumulent forcément. Un quaternion qui est légèrement erroné représente toujours une rotation après avoir été renormalisé ; une matrice qui est légèrement erronée ne sera plus orthogonale et sera difficile à convertir à nouveau en une matrice orthogonale qui convienne. Les domaines d'applications sont variés : infographie, robotique, navigation, dynamique moléculaire, mécanique spatiale des satellites ...

Le *blocage de cardan* est la perte d'un degré de liberté (aussi dit *gimbal lock*), qui survient quand les axes de deux des trois cardans nécessaires pour appliquer ou compenser les rotations dans l'espace à trois dimensions sont portés par la même direction.



Deux des trois cardans deviennent coplanaires : un degré de liberté est perdu

*Que diriez-vous de m'envoyer un quatrième cardan pour Noël ?*

Michael Collins, à bord d'Apollo 11,  
communiquant par radio avec la Terre  
à propos d'un blocage de cardan.