VM
24/12/14
I

Chemins auto-évitants

Soit $d \geq 1$. On note $\mathbb{A}^d$ l'ensemble des couples $\{u,v\}$ de $\mathbb{Z}^d$ tels que $\|u-v\|_1 = 1$. On appelle chemin auto-évitant (CAE) une application $\pi : I \to \mathbb{Z}^d$ telle que

- $I = \{0, \dots, n\}$ (CAE de longueur n) ou $\mathbb{N}$ (CAE infini)
- $\forall i$ tel que $(i, i+1) \in I \times I$, $\{\pi(i), \pi(i+1)\} \in \mathbb{A}^d$
- π est injective.

Soit $(X_a)_{a \in \mathbb{A}^d}$ une suite iid de v.a de loi de Bernoulli (p).
A ω fixé, un CAE π est ouvert si $\forall i$, $X_{\{\pi(i), \pi(i+1)\}}(\omega) = 1$.

__Théorème__ : i) $p > 0$, $d \geq 1$. Presque sûrement, pour tout $n \geq 1$, il existe un CAE ouvert de longueur n (et même une infinité).

ii) $d \geq 1$. Il existe $p_c(d) \in [0,1]$ tel que

- Si $p < p_c(d)$, alors p.s il n'existe aucun CAE infini ouvert partant de 0.
- Si $p > p_c(d)$, alors la proba qu'il existe un CAE infini ouvert partant de $0 \in \mathbb{Z}^d$ est strictement positive.

__dém__ : i) Soit $E_n^\infty = \{$il existe une infinité de CAE ouverts de longueur $n\}$.

Si on montre que $\forall n$, $\mathbb{P}(E_n^\infty) = 1$,

alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} E_n^\infty\right) = 1$.

Soit $n \geq 1$. Montrons que $\mathbb{P}(E_n^\infty) = 1$.

On pose pour tout $k \geq 0$ le CAE : $\pi_k : \{0, \dots, n\} \to \mathbb{Z}^d$ tel que $\pi_k(i) = (nk + i, 0, \dots, 0)$.

On note O_k l'événement "π_k est ouvert".

O_k est $\sigma(X_{\{\pi_k(0), \pi_k(1)\}}, \dots, X_{\{\pi_k(n-1), \pi_k(n)\}})$-mesurable,

donc les O_k sont indépendants,

$$\mathbb{P}(O_k) = \mathbb{P}\left(\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_{\{\pi_k(i-1), \pi_k(i)\}} = 1\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(-) = p^n.$$

(Θ_k) indépendants

$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\Theta_k) = +\infty$, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$\mathbb{P}(\limsup \Theta_k) = 1$

Ainsi, p.s. il existe une infinité de chemins Π_k ouverts,

donc $\mathbb{P}(E_n^\infty) = 1$.

ii) Soit $d \geq 1$. On note $\Theta_d(p)$ la probabilité qu'il existe un CAE ouvert partant de 0 infini. On note E_∞^0 cet événement.

$E_n^0 = \{$ il existe un CAE ouvert de longueur n partant de $0\}$.

Il est clair que $E_\infty^0 \subset \bigcap_{n\geq 1} E_n^0$.

Montrons $\bigcap_{n\geq 1} E_n^0 \subset E_\infty^0$: soit $\omega \in \bigcap_{n\geq 1} E_n^0$.

Pour tout $n \geq 1$, il existe Π_n un CAE de longueur n tel que

$\forall i, \quad \chi_{\{\Pi_n(i), \Pi_n(i+1)\}}(\omega) = 1$ et $\Pi_n(0) = 0$.

Soit $\Pi(0) = 0$. Il existe $a \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\Pi_n(1) = a$ pour une infinité de n. Soit $\Pi(1) = a$. On construit par récurrence $(\Pi(0), \dots, \Pi(m))$ tels que

$(\Pi_n(0), \dots, \Pi_n(m)) = (\Pi(0), \dots, \Pi(m))$ pour une infinité de m.

Le chemin $\Pi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^d$ ainsi obtenu est ouvert et part de 0, donc

$\omega \in E_\infty^0$.

Donc $\Theta_d(p) = \mathbb{P}_p(E_\infty^0)$ est bien défini.

- Montrons que $p \mapsto \Theta_d(p)$ est croissante. Soient $p \leq p'$.

Soit $(U_a)_{a\in A^d}$ une suite de variables aléatoires iid uniformes sur $[0,1]$.

Soient $Y_a = \mathbb{1}_{U_a \leq p}$, $Z_a = \mathbb{1}_{U_a \leq p'}$.

(Y_a) iid de loi $Ber(p)$

(Z_a) ——— $Ber(p')$

$E_{\infty,Y}^0 = \{$ il existe un CAE infini ouvert partant de 0 pour $Y\}$

$E_{\infty,Z}^0 = \{$ ——— $Z\}$

$E_{\infty,Y}^0 \subset E_{\infty,Z}^0$ donc $\Theta_d(p) \leq \Theta_d(p')$.

VH

24/12/14
2

· Soit $p_c(d) = \sup\{p \in [0,1] \mid \theta_d(p) = 0\}$.

Pour tout $p < p_c(d)$, $\theta_d(p) = 0$

——— $p > p_c(d)$, $\theta_d(p) > 0$.

· Il reste à montrer que si $p < p_c(d)$, alors p.s il n'existe aucun CAE infini ouvert.

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. Soit $E_\infty^x = \{$il existe un CAE infini ouvert partant de $x\}$.

Comme $p < p_c(d)$, $\mathbb{P}_p(E_\infty^0) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{P}_p(E_\infty^x) = 0$.

Ainsi, $\mathbb{P}_p(\underbrace{\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} E_\infty^x}_{\text{il existe un CAE infini ouvert}}) = 0$.